

Stohastička analiza – pismeni ispit
14. septembar, 2021.

1. Studenti Primenjene matematike tokom studija moraju da polože ukupno 27 ispita koji su klasifikovani u 3 grupe: *Analiza* (9 ispita), *Algebra* (6 ispita) i *Numerička analiza i primene* (12 ispita). Ako ispit pripada *Algebra* grupi, studenti će ostvariti 6 ESPB poena kada ga polože. Ako ispit pripada *Analiza* grupi, nakon što polože ispit studenti će ostvariti 6 ESPB poena sa verovatnoćom $\frac{1}{3}$ ili 7 ESPB poena sa verovatnoćom $\frac{2}{3}$. 3 ispita iz grupe *Numerička analiza i primene* vrede 5 ESPB poena, 6 vrede 7 ESPB, dok preostali vrede 9 ESPB poena. Kolika je u proseku vrednost slučajno izabranog predmeta?

2. Lanac Markova $\{X_n\}_n$ je formiran na sledeći način :

$$X_0 = X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad X_{n+1} = \min\{X_n, X\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pronaći matricu prelaza za jedan korak i verovatnoće $P\{X_{n+2} = 2 | X_n = 0\}$ i $P\{X_2 = 2\}$.

3. Gajgerov brojač broji radioaktivne čestice emitovane od strane izvora. Prepostavimo da čestice pristižu u Gajgerov brojač u skladu sa Poasonovim procesom sa stopom rasta $\lambda = 1000$ po sekundi. Brojač neće detektovati radioaktivnu česticu sa verovatnoćom 0.1, nezavisno od svega ostalog. Prepostavimo da je brojač detektovao 4 čestice u 0.01 sekundi. Odrediti verovatnoću da je bar 6 čestica pristiglo u brojač u tom periodu.
4. Dat je stohastički proces $\{X_t | t \geq 0\}$ pri čemu \mathcal{F}_t predstavlja istoriju tog procesa do vremena t uključujući i t .
 - (a) Diskutovati $E(X_t X_s - X_{s/2} X_{2s} | \mathcal{F}_s)$ za različite $t, s \geq 0$.
 - (b) Odrediti $E(E(X_t X_s - X_{s/2} X_{2s} | \mathcal{F}_s))$ ako $t = 2s$ i X_t je standardno Braunovo kretanje?
5. Dati su stohastički procesi X_t i Y_t sa stohastičkim diferencijalima

$$dX_t = f_X(t)dt + g_X(t)dW_t, \quad dY_t = f_Y(t)dt + g_Y(t)dW_t,$$

gde $g_X^{-1}(t) = g_Y(t)$. Neka je $Z_t = tX_t$. Odrediti stohastički proces D_t ako je

$$dD_t = dZ_t \cdot dY_t + 3t^2 dW_t.$$