Sadržaj

1 Skupovi, relacije, funkcije

Skup je osnovni pojam u matematici (označava se velikim štampanim slovom, A npr.).
Element skupa se označava malim slovom (ako element a pripada skupu A pišemo $a \in A$, a ako ne pripada zapisujemo $a \notin A$).

Logičke operacije: $\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$
Univerzalni kvantifikator: $\forall$
Egzistencijalni kvantifikator: $\exists$

Osnovni pojmovi:

- skup X je podskup skupa Y: $X \subseteq Y$ ($x \in X \Rightarrow y \in Y$ za svaki elemenat skupa X)
- prazan skup: $\emptyset$
- unija skupova: $X \cup Y = \{x | x \in X \vee y \in Y\}$
- presek skupova: $X \cap Y = \{x | x \in X \wedge y \in Y\}$
- razlika skupova: $X \setminus Y = \{x | x \in X \vee y \notin Y\}$
- komplement skupa X: $\bar{X}$ ili X^C

Dekartov proizvod skupova X i Y (u oznaci $X \times Y$) je skup svih uredjenih parova (x, y) gde $x \in X$ i $y \in Y$:

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}.$$

Za proizvoljan podskup $\rho \subseteq X \times Y$ kažemo da je ρ **relacija** skupa X u odnosu na skup Y.

- **funkcija** f pridružuje svakom elementu x skupa X tačno jedan elemenat y skupa Y. Preciznije:

Definicija. Neka su X i Y neprazni skupovi, a f relacija skupa X u odnosu na skup Y, tj. $f \subseteq X \times Y$. Za relaciju f kažemo da je funkcija iz X u Y i pišemo $f : X \to Y$ ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

1. $(\forall x \in X)(\exists y \in Y)\ (x, y) \in f$,
2. $((x, y) \in f \wedge (x, z) \in f) \Rightarrow y = z$.

Funkcijama opisujemo neku zavisnost. Na primer:

1. površina kruga P zavisi od poluprečnika kruga r, pa imamo $P = r^2\pi$,

2. broj ljudi koji nasevaljavaju planetu zavisi od godina t,

3. poštarina zavisi of težine paketa,

4. pređeni put zavisi od proteklog vremena,...

- za $(x, y) \in f$ pišemo $y = f(x)$
- skup X naziva se domen, a skup Y kodomen

X i Y su skupovi. Kakvi oni mogu biti?

2 Skupovi brojeva

2.1 Skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ je najmanji podskup skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$ koji sadrži 1 i ima osobinu da ako $n \in \mathbb{N}$, onda $n + 1 \in \mathbb{N}$.

Princip matematičke indukcije. Neka su dati iskazi $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Ako važi:

1. Iskaz $P(1)$ je tačan (istinit).

2. Iz pretpostavke da je iskaz $P(k)$ istinit (za bilo koje $k \in \mathbb{N}$) sledi da je iskaz $P(k+1)$ istinit.

Tada je iskaz $P(n)$ istinit za sve prirodne brojeve.

Primer 1.

Zbir prvih n prirodnih brojeva je jednak $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Rešenje:

U $\mathbb{N}$ definišemo operacije *sabiranja* i *množenja* i relaciju poretka $\leq$.

Neke osobine:

- **refleksivnost:** $(\forall x \in \mathbb{N})(x \leq x)$
  antisimetričnost: $(\forall x, y \in \mathbb{N})(x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y)$
  tranzitivnost: $(\forall x, y, z \in \mathbb{N})(x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z)$

- (i) Sabiranje je zatvorena (ako $x, y \in \mathbb{N}$ onda $x + y \in \mathbb{N}$), komutativna i asocijativna operacija (algebarska struktura $(\mathbb{N}, +)$ je komutativni grupoid)

  - često posmatramo skup $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ sa neutralnim elementom za sabiranje: $(\forall x \in \mathbb{N})$ $(x + 0 = x)$

  (ii) Množenje je zatvorena, komutativna i asocijativna operacija sa neutralnim elementom 1 tj. $(\forall x \in \mathbb{N})$ $(x \cdot 1 = 1 \cdot x = x)$ (algebarska struktura $(\mathbb{N}, +)$ je komutativni grupoid)

  (iii) važi distributivnost druge operacije prema prvoj:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \text{i}$$
$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

  (iv) relacija $\leq$ je poredak na $\mathbb{N}$ i važi

  (a) totalnost uredjenja: $x \leq y \vee y \leq x$

  (b) saglasnost sa operacijama: iz $x \leq y$ sledi $x + z \leq y + z$ i $x \cdot z \leq y \cdot z$

- U $\mathbb{N}$ nije uvek moguće rešiti jednačine $a + x = b$ i $a \cdot x = b$
  (npr. $2 + x = 1$ i $2 \cdot x = 1$)

  – podsetimo se: prost broj je prirodan broj veći od 1 koji je deljiv samo sa samim sobom i sa 1 (npr. $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$)

- Svaki prirodan broj može se na jedinstven način rastaviti na proste činioce, tj. za svaki prirodan broj $n \geq 2$ postoje jedinstveno određeni prosti brojevi $p_1 < p_2 \ldots < p_{k-1} < p_k$ i prirodni brojevi $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{k-1} < \alpha_k$ tako da važi:

$$x = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_{k-1}^{\alpha_{k-1}} \cdot p_k^{\alpha_k}.$$

2.2 Skup celih brojeva $\mathbb{Z}$

- skup u kojem se nalaze rešenja svih mogućih jednačina oblika $a + x = b$, $a, b \in \mathbb{N}$

- $(-\mathbb{N}) = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- **Definicija.** Skup celih brojeva je $\mathbb{Z} = (-\mathbb{N}) \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$.

  (i) Sabiranje je zatvorena, komutativna i asocijativna operacija
  - Suprotan broj broju a je rešenje jednačine $a + x = 0$ i označava se sa $x = -a$. Suprotan broj je ujedno i inverzni element sabiranja.
  - 0 je neutralni elemenat $(\forall x \in \mathbb{N})\ (x + 0 = x)$

  (ii) Množenje je zatvorena, komutativna i asocijativna operacija sa neutralnim elementom 1 tj. $(\forall x \in \mathbb{N})$ $(x \cdot 1 = 1 \cdot x = x)$

  (iii) važi distributivnost druge operacije prema prvoj:

$$
\begin{aligned}
x \cdot (y + z) &= x \cdot y + x \cdot z \quad \text{i} \\
(x + y) \cdot z &= x \cdot z + y \cdot z
\end{aligned}
$$

  (iv) relacija $\leq$ je poredak na $\mathbb{Z}$ i važi
    (a) totalnost uredjenja: $x \leq y \vee y \leq x$
    (b) saglasnost sa operacijama:
    iz $x \leq y$ sledi $x + z \leq y + z$
    iz $x \leq y$ i $0 \leq z$ sledi $x \cdot z \leq y \cdot z$

- sada je jednačina $a + x = b$ rešiva za svako x, ali ne i jednačina $a \cdot x = b$ (npr. $2 \cdot x = 1$)

Algebarska struktura $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$ je totalno uređen prsten jer:

- $(\mathbb{Z}, +)$ je Abelova (komutativna grupa)

- $(\mathbb{Z}, \cdot)$ je komutativni grupoid

- važi distributivnost

- relacija poretka ima gore navedene osobine

2.3 Skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$

- **Definicija.** Brojevi oblika $m \cdot n^{-1} = \dfrac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, nazivaju se racionalni brojevi. Skup svih racionalnih brojeva označava se sa $\mathbb{Q}$.

- Jasno $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, pa u $\mathbb{Q}$ važi sve što važi i u $\mathbb{Z}$.

  Dodatno:
  - Znamo da za svaki ceo broj $x \in \mathbb{Z}$ postoji njemu suprotan broj $-x \in \mathbb{Z}$ takav da je njihov zbir jednak neutralnom elementu za sabiranje $x + (-x) = 0$.

  - Analognu situaciju imamo i kod množenja u $\mathbb{Q}$: za svaki racionalni broj $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ postoji njemu inverzan koji označavamo $x^{-1} \in \mathbb{Q}$, takav da je njihov proizvod jednak jediničnom elementu za množenje $x \cdot x^{-1} = 1$.

  - Sada možemo da rešimo jednačinu $a \cdot x = b$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$.

Algebarska struktura $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ je totalno uređeno polje jer:

- $(\mathbb{Q}, +)$ je Abelova (komutativna grupa)

- $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ je Abelova (komutativna grupa)

- važi distributivnost

- relacija poretka ima prethodno navedene osobine

Decimalni zapis

$\dfrac{a}{b}$, $a, b > 0 \in \mathbb{Z}$ pridružujemo $q, q_1 q_2 \ldots$, $q \geq 0 \in \mathbb{Z}, q_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$

Teorema. Za svaka dva cela broja a i b, gde je $b > 0$, postoji jedinstveni par brojeva q i r tako da $a = b\,q + r$ i $0 \leq r < b$.

- $r = 0$, postupak je završen

- $r > 0$, deli se $10r$ sa b: $10r = q_1 b + r_1$, $0 \leq r_1 < b$ i $0 \leq q_1 < 10$

  – $r = 0$, postupak je završen

  – $r > 0$, deli se $10r_1$ sa b: $10r_1 = q_2 b + r_2$, $0 \leq r_2 < b$ i $0 \leq q_2 < 10$ $\vdots$

  – $r_n = 0$, dobija se $\frac{a}{b} = q, q_1 q_2 \ldots q_n 00 \ldots$

  – $r_n \neq 0$ ni za jedno n, niz je periodičan!

Obrnuto,

$$q, q_1 q_2 \ldots q_n 00 \cdots = \frac{10^n q + 10^{n-1} q_1 + \cdots + 10^0 q_n}{10^n}$$

$$q, q_1 q_2 \ldots q_n ss \cdots = \frac{10^n q + 10^{n-1} q_1 + \cdots + 10^0 q_n}{10^n} + \frac{s}{9 \cdot 10^n}$$

!!! Isti razlomak se dodeljuje decimalnom zapisu sa nulama na kraju, kao i periodičnom zapisu kod koga je poslednja cifra koja nije nula manja za jedan, a nakon toga se ponavlja broj 9.

2.4 Skup iracionalnih brojeva $\mathbb{I}$

Da li postoje brojevi koji nisu racionalni?

1. Kolika je dužina dijagonale d jediničnog kvadrata?

Zaključak: $\sqrt{2}$ nije racionalan broj! On je algebarski broj.

Definicija. x^* je algebarski broj ako postoji polinom

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdot + a_1 x + a_0, \quad a_k \in \mathbb{Z},\ k = 0, 1, \ldots, n,$$

takav da je $P_n(x^*) = 0$.

2. Poluobim jedinične kružnice?

$$\pi = 3.14159\ldots (35 \text{ cifara iza decimalnog zapisa})$$

nije racionalan broj ali nije ni algebarski. Takvi brojevi se nazivaju **trancedentni**. Ovim problemom se bavio još Arhimed, ali je poluobim jedinične kružnice izračunat tek u 16. veku. 17761. godine Lambert je dokazao da π nije racionalan broj, a 1882. godine Linderman je dokazao da π nije rešenje algebarske jednačine.
Još jedan primer:

$$e = 2.71828\ldots$$

Zanimljivo je da je lakše konstruisati primer transcedentnog broja nego utrditi da je taj broj transcedentan. Na primer, još uvek nije poznato da li je Ojlerova konstanta γ transcedentan broj.

Definicija. Skup iracionalnih brojeva čine oni brojevi koji se predstavljaju preko beskonačnog neperiodičnog decimalnog zapisa.

- algebarski (nule polinoma sa celobrojnim koeficijentima) i transcedentni iracionalni brojevi $(\pi, e, \ldots)$

2.5 Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$

- **Definicija.** Skup realnih brojeva je
$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$
- U strukturi $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ koja je totalno uređeno polje važe sledeće aksiome:

Svojstva operacije +

1. $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x + y = y + x)$ (komutativnost)
2. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})((x + y) + z = x + (y + z))$ (asocijativnost)
3. $(\exists 0 \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(0 + x = x + 0 = x)$ (neutralni element za sabiranje)
4. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists (-x) \in \mathbb{R})(x + (-x) = (-x) + x = 0)$ (inverzni element za sabiranje)

Svojstva operacije $\cdot$

1. $(\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(x \cdot y = y \cdot x)$ (komutativnost)
2. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\})((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$ (asocijativnost)
3. $(\exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(1 \cdot x = x \cdot 1 = x)$ (neutralni element za množenje)
4. $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\exists x^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1)$ (inverzni element za množenje)

Distributivnost $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})(x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$

Relacija poretka $\leq$

1. $(\forall x \in \mathbb{R})(x \leq x)$ (refleksivnost)
2. $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y)$ (antisimetričnost)
3. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})(x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z)$ (tranzitivnost)
4. $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x \leq y \vee y \leq x)$ (totalnost uređenja)

Slaganje operacija sa relacijom $\leq$

1. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})(x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z)$
2. $(\forall x, y \in \mathbb{R})(0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x \cdot y)$

Sve aksiome do sada važe i u $\mathbb{Q}$. Naredna aksioma pravi razliku između realnih i racionalnih brojeva

Aksioma kompletnosti. Ako su X i Y neprazni podskupovi skupa $\mathbb{R}$ takvi da je $x \leq y$ za sve $x \in X$, $y \in Y$, tada postoji element $z \in \mathbb{R}$ takav da je
$$x \leq z \leq y \qquad \text{za sve } x \in X, y \in Y.$$

Definicija. Neprazan podskup $X \subseteq \mathbb{R}$ je ograničen sa gornje strane ako postoji $c \in \mathbb{R}$ tako da je za sve $x \in X$, $x \leq c$. Broj c se naziva gornje ograničenje ili majoranta skupa X . Ako postoji majoranta skupa X koja pripada tom skupu, ona se zove najvećim elementom skupa X.
Definicija. Elemenat $c \in X$, $X \subseteq \mathbb{R}$, je najveći elemenat (maksimum) skupa X ako je za sve $x \in X$, $x \leq c$. Tada pišemo $c = \max X$.
Definicija. Najmanje gornje ograničenje (ako postoji) naziva se supremum skupa X.
Definicija. Neprazan podskup $X \subseteq \mathbb{R}$ je ograničen sa donje strane ako postoji $c \in \mathbb{R}$ tako da je za sve $x \in X$, $x \geq c$. Broj c se naziva donje ograničenje skupa X .
Definicija. Elemenat $c \in X$, $X \subseteq \mathbb{R}$, je najmanji elemenat (minimum) skupa X ako je za sve $x \in X$, $x \geq c$. Tada pišemo $c = \min X$.
Definicija. Najveće donje ograničenje (ako postoji) naziva se infimum skupa X.

Posledice aksiome kompletnosti

Princip supremuma. Svaki neprazan sa gornje strane ograničen podskup skupa $\mathbb{R}$ ima supremum u $\mathbb{R}$.

Princip infimuma. Svaki neprazan sa donje strane ograničen podskup skupa $\mathbb{R}$ ima infimum u $\mathbb{R}$.

Kantorov princip. Neka je $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$ niz intervala takvih da $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$. Tada je
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

2.6 Skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$

- **Definicija.** Skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ je skup svih uređenih parova (a, b) realnih brojeva.

- Dva kompleksna broja data sa $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ su jednaka ako i samo ako je $a_1 = a_2$ i $b_1 = b_2$.
- Za bilo koja dva uređena para $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definišemo
  - operaciju sabiranja $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
  - operaciju množenja $(a, b) \cdot (b, c) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$
- imaginarna jedinica $i = (0, 1)$. Važi $i^2 = -1$.
- $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$, $\qquad k \in \mathbb{Z}$
- $(a, b) = a + ib$
  - Broj a nazivamo realni deo kompleksnog broja $z = a + ib$ (oznaka $Re\ z$)
  - Broj b nazivamo imaginarni deo kompleksnog broja $z = a + ib$ (oznaka $Im\ z$)

  Sledi
  $$\mathbb{C} = \{x + i \cdot y \,|\, x, y \in \mathbb{R}\},$$
- Operacije

  zbir: $(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

  razlika: $(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

  množenje: $(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

  deljenje: Ako je $z_1 = x_1 + iy_1$ i $z_2 = x_2 + iy_2$ i za bar jedan od brojeva x_2, y_2 važi $x_2 \neq 0$, $y_2 \neq 0$, tada je njihov količnik
  $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$
- Važi Kantorov princip u $\mathbb{C}$
- Svaki polinom sa koeficijentima iz $\mathbb{C}$ ima nulu u $\mathbb{C}$.

Kompleksan broj $x - ib$ se naziva **konjugovano kompleksan broj** kompleksnog broja $z = a + ib$ i označava se sa $\bar{z} = a - ib$.
Svakom kompleksnom broju se jednoznačno može pridružiti $A(x, y)$ u $xy-$ravni i obrnuto.

Kompleksan broj $z = x + iy$ se može zapisati

-u trigonometrijskom obliku:
$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

gde $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Broj ρ se naziva **moduo kompleksnog broja** z i označavamo ga $\rho = |z|$. Važi $z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$. Ugao $\varphi = \arg z \in [0, 2\pi]$ se naziva **argument kompleksnog broja** z.

-u eksponencijalnom obliku:
$$z = \rho e^{i\varphi}$$

3 Funkcije

Opšta definicija

- podsetimo se:

Dekartov proizvod skupova X i Y (u oznaci $X \times Y$) je skup svih uredjenih parova (x, y) gde $x \in X$ i $y \in Y$: $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$.

Za proizvoljan podskup $\rho \subseteq X \times Y$ kažemo da je ρ relacija skupa X u odnosu na skup Y.

- funkcija f pridružuje svakom elementu x skupa X tačno jedan elemenat y skupa Y. Preciznije:

Definicija. Neka su X i Y neprazni skupovi, a f relacija skupa X u odnosu na skup Y, tj. $f \subseteq X \times Y$. Za relaciju f kažemo da je funkcija iz X u Y i pišemo $f : X \to Y$ ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

1. $(\forall x \in X)(\exists y \in Y)\ (x, y) \in f$,
2. $((x, y) \in f \wedge (x, z) \in f) \Rightarrow y = z$.

- za $(x, y) \in f$ pišemo $y = f(x)$
- skup X naziva se domen, a skup Y kodomen

Definicija. Funkcija $f : X \to Y$ je injekcija ("1-1") ako

$$(\forall x_1, x_2 \in X)\ (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2).$$

Grafik injektivne funkcije svaka horizontalna prava seče najviše jednom!

Definicija. Funkcija $f : X \to Y$ je sirjekcija ("na") ako

$$(\forall y \in Y)(\exists x \in X)\ y = f(x).$$

Definicija. Funkcija $f : X \to Y$ je bijekcija ako je i injekcija i sirjekcija.

Definicija. Za funkcije $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ funkcija $g \circ f : X \to Z$ data sa

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad \text{za sve } x \in X,$$

naziva se kompozicija funkcija f i g (ili složena funkcija od f i g).

Teorema. Funkcija $f : X \to Y$ ima inverznu funkciju $f^{-1} : Y \to X$ tj. takvu da

$$(\forall x \in X)\ \ (f^{-1} \circ f)(x) = x \qquad \text{i} \qquad (\forall y \in Y)\ \ (f \circ f^{-1})(y) = y,$$

ako i samo ako je bijekcija.

Realne funkcije

U ovom kursu ćemo posmatrati...

$$X, Y \subseteq \mathbb{R}$$

Definicija. Realna funkcija jedne realne promenljive je svaka funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, gde je $X \subseteq \mathbb{R}$.

- za domen uzimamo najširi podskup od $\mathbb{R}$ za koji izraz kojim je data funkcija ima smisla - taj skup se naziva prirodni domen funkcije f, u oznaci D_f
- za kodomen uzimamo najčešće ceo skup $\mathbb{R}$
- funkcije mogu biti zadate: eksplicitno, implicitno i parametarski

Osobine realnih funkcija

Definicija. Funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ je ograničena sa gornje (donje) strane ako

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in X)\ f(x) \leq (\geq) M.$$

Funkcija je ograničena ako je ograničena i sa gornje i sa donje strane.

- Za skup $X \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je simetričan (prema koordinatnom početku) ako za sve $x \in X$ važi i da $-x \in X$.

Definicija. Funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ definisana na simetričnom skupu $X \subseteq \mathbb{R}$ je parna ako $(\forall x \in X) \quad f(-x) = f(x)$, a neparna ako $(\forall x \in X) \quad f(-x) = -f(x)$.

- Grafik parne funkcije je simetričan u odnosu na $y-$ osu, a grafik neparne u odnosu na koordinatni početak!
- Funkcija definisana na simetričnom skupu može se zapisati u obliku zbira parne i neparne funkcije:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

- Ako domen funkcije nije simetričan (u odnosu na koordinatni početak), onda ona nije ni parna ni neparna.

Primer. Ispitati parnost sledećih funkcija:

(a) $f(x) = x^2 + 2$

(b) $g(x) = x^3 - x$

(c) $h(x) = 3x - x^2$.

Definicija. Za funkciju $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je periodična ako postoji pozitivan broj T (koji se naziva periodom funkcije f), takav da za sve $x \in X$ i $x + T \in X$ važi da je $f(x + T) = f(x)$. Najmanji takav pozitivan broj naziva se osnovni period funkcije f.

Na primer, funkcija $f(x) = \sin x$ je periodična sa osnovnim periodom 2π.

Primer. Date su funkcije $f(x) = x^2$ i $g(x) = x - 3$. Pronaći kompozicije $f \circ g$ i $g \circ f$.

Primer. Neka je $f(x) = 2x - 7$. Da li je ova funkcija bijekcija? Ako jeste, naći njoj inverznu funkciju $f^{-1}(y)$, a zatim uporediti $f^{-1}(y)$ i $\frac{1}{f(y)}$.

Elementarne funkcije

Matematički model je matematički opis (preko funkcija ili jednačina) nekog realnog fenomena (veličina populacije, tražnja za nekim proizvodom, brzina padajućeg objekta,...). Svrha modela je da opiše taj fenomen i možda predvidi buduće ponašanje.

Da bismo odredili model neophodno je:

- odrediti nezavisne i zavisne promenljive
- odrediti jednačine koje povezuju promenljive (koristeći fizičke zakone ili na primer, sakupljanjem podataka).

Matematički model nikada nije idealan i ne može u potpunosti precizno da opiše dati fizički proces (uvek se pojavljuje nesigurnost). Međutim, dobar matematički model treba da bude dovoljno uprošćen ali i dovoljno precizan. Da bismo to mogli da postignemo, neophodno je da dobro poznajemo funkcije i njohove osobine.

- Osnovne elementarne funkcije su:
  - * konstantna $f(x) = c = const$,
  - * stepena $f(x) = x^a$,
    - $a = n$, $n \in \mathbb{N}$
    - $a = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ (korena funkcija $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$)
    - $a = -n$, $n \in \mathbb{N}$
  - * eksponencijalna
  $$f(x) = a^x,\ a > 0,$$
  - * logaritamska
  $$f(x) = \log_a x, \quad a > 0, a \neq 1, x > 0,$$
  - * trigonometrijske,
  $$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \cos x, \quad h(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad k(x) = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$
  - * inverzne trigonometrijske funkcije
  $$f(x) = \arcsin x, \quad g(x) = \arccos x, \quad h(x) = \operatorname{arctg} x, \quad k(x) = \operatorname{arcctg} x$$
- ostale funkcije dobijaju se od osnovnih elementarnih funkcija primenom konačno mnogo sabiranja, oduzimanja, množenja, deljenja i kompozicija

  Na primer:
  - polinomi (linearne, kvadratne funkcije)
  $$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,\ a_n \neq 0$$
  - racionalne funkcije
  $$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad P(x) \text{ i } Q(x) \text{ su polinomi } , Q(x) \neq 0$$
  - po delovima definisane funkcije (npr. $f(x) = |x|$)