

Stohastička analiza – pismeni ispit  
26. avgust, 2021.

1. Date su dve slučajne promenljive  $X$  i  $Y$ , pri čemu je  $Y$  nenegativna. Pronaći Borelovu funkciju  $f$  takvu da važi

$$E\left(E(E(X|Y) + E(X|f(X)))|Y\right) + E\left(Xf(Y^2)|\mathcal{F}(Y)\right) - YE(X|Y) = 2E(X).$$

2. Neka je  $N$  diskretna slučajna promenljiva sa vrednostima u skupu  $S_N = \{1, 2, 3, 4\}$  i odgovarajućim verovatnoćama  $p_i = P\{N = i\}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Koristimo  $N$  da kreiramo lanac Markova  $X_n$  sa skupom stanja  $\{0, 1, 2, 3\}$  na sledeći način: Sistem će ostati u stanju 0 sa verovatnoćom  $p_1$ . Ako je sistem u stanju  $i \geq 0$ , moguće je prelazu stanje  $i + 1$  sa verovatnoćom  $p_{i,i+1} = P\{N > i + 1 | N > i\}$  ili u stanje 0 sa verovatnoćom  $p_{i,0} = P\{N = i + 1 | N > i\}$ .

- (a) Dokazati da  $E(N) = 1 + p_{0,1} + p_{0,1}p_{1,2} + p_{0,1}p_{1,2}p_{2,3}$ .  
 (b) Odrediti stacionarne verovatnoće.

3. Korisnici pristižu u biblioteku u skladu sa Poasonovim procesom sa stopom rasta 2 korisnika po minuti i oni se mogu klasifikovati u 3 kategorije, nezavisno jedan od drugog: studenti, radnici i ostali. Trećina populacije koja koristi usluge biblioteke su studenti i vreme koje oni provedu u biblioteci, nezavisno jedan od drugog, je uniformno raspodeljeno u intervalu  $(10, 70)$  minuta. To vreme je takođe nezavisno od broja korisnika biblioteke. Odrediti očekivani broj studenata koji će doći u biblioteku u prvih sat vremena od otvaranja. Koje je ukupno očekivano vreme koje ti studenti provedu u biblioteci? Odrediti verovatnoću da nijedan student dođe u biblioteku u 10 minuta.

4. (a) Dokazati da je  $W_t - \frac{t}{s}W_s$ ,  $t < s$  nezavisno od  $W_s$  ako je sa  $W_t$ ,  $t \geq 0$  dato standardno Braunovo kretanje.  
 (b) Izračunati  $E(W_t - \frac{t}{s}W_s | W_s)$ ,  $t < s$ .  
 (c) Odrediti  $E(W_t^2 - \frac{2t}{s}W_t W_s + \frac{t^2}{s^2}W_s^2 + sW_t - tW_s | W_s)$ ,  $t < s$ .

5. Da li stohastički proces  $X_t = a + W_t^4 t + W_t - t$  može biti rešenje SDJ

$$dX_t = \frac{1}{t}(X_t - a)dt + 4X_t dW_t?$$