Stohastička analiza - pismeni ispit
17. septembar 2020.

1. Univerzitetski fudbalski tim igra seriju utakmica u narednom periodu. Ako pobedi utakmicu, sledeću će pobediti sa verovatnoćom 0.6, a jednako je verovatno da će je izgubiti ili igrati nerešeno. Ako su igrali nerešeno, sledeću utakmicu će pobediti sa verovatnoćom 0.2, dok će je izgubiti sa verovatnoćom 0.3. Ako izgube utakmicu, sledeću će igrati nerešeno sa verovatnoćom 0.3, a neće izgubiti sa verovatnoćom 0.4. Pronaći verovatnoće prelaza za jedan korak homogenog lanca Markova koji prati ishod utakmica igranih od strane Univerzitetskog fudbalskog tima. Da li je moguće da lanac Markova bude stacionaran ako se zna da je verovatnoća da tim neće izgubiti prvu utakmicu 0.4?

2. Zemljotresi se dešavaju u skladu sa Poasonovim procesom X_t sa stopom rasta 2 na nedelju dana. Svaki zemljotres prouzrokuje neku štetu. Pretpostavimo da su štete prouzrokovane različitim zemljotresima međusobno nezavisne i da je šteta Y_n prouzrokovana $n-$tim zemljotresom uniformna slučajna promenljiva na intervalu $(0, 10)$. Proceniti ukupnu štetu prouzrokovanu zemljotresima u godinu dana, i odrediti standardnu devijaciju.

3. Neka je $X_1 : \mathcal{U}(0, 1)$. Data je niz slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \ldots$ definisan na sledeći način: Ako je dato $X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}$, tada X_n ima uniformnu raspodelu na intervalu $(0, x_{n-1})$.

(a) Dokazati da je $E(X_{n+1}) = 2^{-(n+1)}$.

(b) Dokazati da je $\{X_n\}_n$ supermartingal u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_n\}_n$, $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}(X_1, \ldots, X_n)$.

4. Dokazati da važi

$$E\big(W_{t/2}(W_{2t} - W_t)^2 + W_{t/2}^2 | \mathcal{W}_{t/2}\big) = E\big(W_t(W_{2t} - W_t)^2 + W_{t/2}^2 | \mathcal{W}_{t/2}\big)$$

ako je $\mathcal{W}_t$ istorija Braunovog kretanja W_t do trenutka t.

5. Data je funkcija $u(x, t) = x(x - t)^2 + x^2$ i standardno Braunovo kretanje W_t. Odrediti dY_t i dZ_t ako je $Y_t = u(W_t, t)$, $Z_t = u(X_t, t)$, gde $dX_t = dt + 2dW_t$.