Stohastička analiza - pismeni ispit

29.6.2020.

1. Student vežba zadatke za ispit. Za rešavanje nekih (teških) zadataka je potrebno više vremena i zna se da je svaki peti zadatak takav i da mu u proseku treba 1 sat da ga reši. Vreme koje mu je potrebno da reši lak zadatak je eksponencijalno raspoređeno sa sredinom 10 minuta. Polovina problema pripada lakoj kategoriji, dok su ostali iz srednje. Vreme koje mu je potrebno da reši zadatak iz srednje kategorije je slučajna promenljiva

$$X : \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \end{pmatrix},$$

data u minutima. Odrediti očekivano vreme koje mu je potrebno da reši proizvoljno odabran zadatak.

2. Posmatramo eksperiment ukrštanja zečeva, tj. pratimo evoluciju određenog gena koji se pojavljuje u dva tipa, G ili g. Zec može imati par gena, GG (dominantan), Gg (hibrid - redosled nije bitan, Gg je isto što i gG) ili gg (recesivan). Ukrštanjem dva zeca, potomak nasleđuje gene od oba roditelja sa jednakim verovatnoćama. Dakle, ako ukrštamo dominantnog (ili recesivnog) sa hibridom, potomak je dominantan (ili recesivan) sa verovatnoćom 1/2 ili hibrid sa istom verovatnoćom. Ako ukrštamo hibrid sa hibridom, potomak je dominantan ili recesivan sa verovatnoćama 0.25. Krećemo sa zecom datog karaktera (GG, Gg ili gg) i ukrštamo ga sa hibridom. Potomak se zatim ponovo ukršta sa hibridom i proces se ponavlja kroz generacije (potomak se uvek ukršta sa hibridom).

(a) Naći matricu prelaza za jedan korak.

(b) Pretpostavimo da je eksperiment započet sa hibridom. Neka je $\mu_n = [\mu_n(GG), \mu_n(Gg), \mu_n(gg)]$ raspodela verovatnoća karaktera zeca $n-$te generacije. Drugim recima, $\mu_n(GG)$, $\mu_n(Gg)$, $\mu_n(gg)$ su verovatnoće da je $n-$ta generacija GG, Gg ili gg, redom. Odrediti μ_1, μ_2 i μ_3. Šta se može primetiti?

Da ste ovaj rezultat dobili pre 1858. godine kada je Gregor Mendel počeo da razmnožava grašak u svojoj bašti u manastiru i posmatra ishod ukrštanja, postali biste veoma poznati. Ako tačno uradite zadatak, moći ćete da vidite zašto.

3. Pretpostavimo da se ljudi koji žive u Srbiji zaražavaju korona virusom u skladu sa homogenim Poasonovim procesom sa stopom rasta 1000 po danu. Zna se da samo neki od zaraženih razviju simptome. Pretpostavmo da individua razvije simptome sa verovatnoćom p, nezavisno od drugih. Zna se da medicinsko osoblje sa verovatnoćom 0.99 neće moći da pruži adekvatnu negu svim pacijentima ako je broj novoinficiranih sa simptomima u narednih 10 dana veći od 1000.

(a) Pronaći maksimalnu vrednost za p takvu da adekvatna medicinska nega može biti obezbeđena svim novoinficiranim sa simptomima u narednih 10 dana i to sa verovatnoćom 0.99 (odrediti jednačinu koju to p zadovoljava).

(b) Odrediti verovatnoću da broj novoinficiranih sa simptomima u T dana nije veći od 100 ako $p = 0.1$. T je očekivano vreme potrebno da broj novoinficiranih dostigne 2000, počevši od danas.

4. Dato je standardno Braunovo kretanje W_t. Odrediti stohastičku diferencijalnu jednačinu koju zadovoljava stohastički proces $Y_t = 2e^{\frac{t^2}{2} - bt + cW_t}$. Kada važi $E(Y_t) = 2e^{\frac{t^2}{2}}$?

5. $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ je niz apsolutno integrabilnih slučajnih promenljivih adaptiranih filtraciji $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$. Pretpostavimo da postoje realni brojevi u_n, v_n, $n \geq 0$, takvi da

$$E(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) = u_n Y_n + v_n.$$

Pronaći nizove realnih brojeva $\{a_n\}_{n\geq 0}$ i $\{b_n\}_{n\geq 0}$, $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, takve da je niz slučajnih promenljivih $M_n := a_n Y_n + b_n$, $n > 1$ martingal u odnosu na istu filtraciju.