Stohastička analiza - pismeni ispit

8.7.2021.

1. Date su nezavisne slučajne promenljive X i Y. Funkcija gustine slučajne promenljive X je $\varphi_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x-1|}$, $x \in \mathbb{R}$, a $Y : \mathcal{U}(0,2)$. Odrediti autokovarijansnu funkciju stohastičkog procesa $Z_t = (t^2+1)XY$.

2. Čestica se kreće po jediničnoj kružnici i može se naći u 3 tačke poređane u smeru kretanja kazaljke na satu (nazovimo ih 0, 1 i 2). Čestica će napraviti korak u smeru kretanja kazaljke na satu sa verovatnoćom p, $0 < p < 1$, a korak u smeru suprotnom od smera kretanja kazaljke na satu sa verovatnoćom $1-p$. Ako se zna da je prvobitan položaj bio 0, koji deo dugog vremenskog perioda čestica provodi u tački 0?

3. Broj klijenata koji uđu u banku do trenutka t modelira se homogenim Poasonovim procesom sa stopom rasta 10 po satu. Čim klijent uđe u banku biva momentalno uslužen na jednom od beskonačno mnogo šaltera. Vremena usluživanja različitih klijenata su međusobno nezavisna i imaju ekponencijalnu raspodelu sa očekivanjem 10 minuta. Odrediti očekivani broj klijenata usluženih do 11h, ako se zna da banka počinje sa radom u 8h.

4. Neka je dat proces

$$X_t := W_t^3 - 3tW_t + c, \ t \geq 0,$$

pri čemu W_t predstavlja standardno Braunovo kretanje.

(a) Odrediti konstantu c takvu da je X_t martingal u odnosu na istoriju Braunovog kretanja.

(b) Navesti sve uslovne potrebne da ispuni proces X_t da bi on bio standardno Braunovo kretanje.

(c) Da li je proces X_t standardno Braunovo kretanje za vrednost konstante iz (a)?

(d) Odrediti dX_t i izraziti X_t kao stohastički integral.