

# Pismeni ispit iz Stohastičke analize

## 27.8.2020.

1. U jednom kazinu ljudi imaju mogućnost da zavrte točak sreće za 100 evra. Igrač može dobiti ukupno 30 nagrada, od čega polovina ima vrednost 30 evra, vrednost 14 nagrada je uniformno raspodeljena slučajna promenljiva na intervalu (60, 120) evra. Takođe postoji i *jackpot* nagrada kojom igrač osvaja 900 evra i priliku da još jednom zavrти točak. Svaki igrač ima jednaku verovatnoću da osvoji bilo koju od 30 nagrada. Odrediti očekivanu vrednost nagrada koje prosečan igrač osvoji sa uloženih 100 evra.
2. Prepostavimo da profesije mogu da se klasifikuju u tri grupe: profesionalni radnik, vešt radnik i radnik. Sin profesionalnog radnika je u 80% slučajeva profesionalni radnik, a u 10% slučajeva vešt radnik. U slučaju veštog radnika, u 60% slučajeva njegov sin je takođe vešt radnik, a u 20% profesionalni radnik. Sin radnika je u 50% slučajeva takođe radnik, dok je u 25% slučajeva profesionalni ili vešt radnik. Prepostavite da svaki čovek ima bar jednog sina i formirajte lanac Markova koji prati profesije muških potomaka date porodice kroz generacije.
  - (a) Odrediti verovatnoće prelaza za jedan korak.
  - (b) Pronaći verovatnoću da će slučajno izabran unuk radnika biti profesionalni radnik.
  - (c) Odrediti verovatnoću da će daleki potomak slučajno izabranog pripadnika neke porodice biti radnik.
3. Poznato je da ljudi bivaju zaraženi korona virusom u skladu sa Poasonovim procesom sa stopom rasta  $\lambda = 300$  po danu. Vreme od kada se pojedinac zarazi do pojave simptoma je eksponencijalna slučajna promenljiva sa prosečnom vrednošću 5 dana. Prepostavimo da su vremena zaražavanja pojedinaca međusobno nezavisna. Pronaći procenu za broj zaraženih bez simptoma u 10 dana. Da li u tom periodu ima više zaraženih bez ili sa simptomima?
4. Dokazati da je  $X_t = e^{-\frac{t}{2}} \cosh W_t$  martingal u odnosu na istoriju Braunovog procesa.
5. Pronaći konstante  $a$  i  $b$  takve da

$$E(X_t^2) - E(Y_t(Z_t - 1)) = 0$$

važi za svako  $t$  ako je  $X_t = \int_0^t W_s^b e^{W_s^2 - as^2} dW_s$ ,  $Y_t = \int_0^t W_s^2 dW_s$ ,  $dZ_t = e^{2(W_t^2 - t^2)} dW_t$ ,  $Z_0 = 1$ .

Možda korisno:  $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$