

Stohastička analiza – pismeni ispit
9.6.2021.

- Dat je stohastički proces X_t sa nezavisnim priraštajima takav da $E(X_t) = c$ i $D(X_t) = 2t$ za svako t . Neka je $U : \mathcal{N}(0, c^2)$ nezavisna u odnosu na X_t , $t \in \mathbb{R}$. Pronaći očekivanje i autokovarijansnu funkciju stohastičkog procesa $Y_t = X_t - tU$, $t \in \mathbb{R}$.
- Organizacija ima N zaposlenih, pri čemu je N velik broj. Svaki zaposleni može biti klasifikovan u jednu od 3 kategorije i menja kategoriju nezavisno i u skladu sa lancem Markova sa matricom prelaza

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Koji procenat zaposlenih je u svakog kategoriji? Ako je na početku svaki zaposleni klasifikovan u prvu kategoriju, koja je verovatnoća da će zaposleni ostati u prvoj kategoriji posle 2 klasifikacije?

- Broj ljudi koji kupuju lutrijske listiće prati Poasonov proces sa stopom rasta 100 po danu. Poznato je da su dobici nezavisni i da je dobitak od svakog lutrijskog listića slučajna promenljiva sa normalnom raspodelom, očekivanjem 1 i standardnom devijacijom $\sqrt{3}$. Takođe, dobitak ne zavisi od broja lutrijskih listića kupljenih u nekom vremenskom periodu. Odrediti očekivani dobitak od svih lutrijskih listića kupljenih u 2 dana, kao i disperziju.
- Neka je $X_t = tW_t$, gde je W_t standardno Braunovo kretanje. Rešiti jednačinu

$$D\left(\int_0^t \sqrt{2s}dW_s\right) - E\left(\int_0^t \frac{2}{1+s}dW_s \int_0^t (1+s)dW_s\right) + 2 \int_0^1 dX_t \cdot dW_t = 0$$

po t .

- Pokazati da je $e^{2W_t}e^{-2t}$ martingal u odnosu na istoriju Braunovog kretanja ako je sa W_t označeno standardno Braunovo kretanje.