Stohastička analiza - pismeni ispit
27.1.2021.

1. Data je $\nu-$merljiva slučajna promenljiva X. Poznato je da

$$E(X|\nu) : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

(a) Odrediti X i $E(X)$.

(b) Dokazati da ne postoji Borelova funkcija f takva da $Y = f(X)$ ako

$$E(Y|\nu) : \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

i $F_Y(3) = \frac{1}{2}$.

2. Na kraju svakog meseca odeljenje za procenu rizika ocenjuje klijente i klasifikuje ih u 3 kategorije: rizična, stabilna i pouzdana. Klijent može ostati u istoj kategoriji i sledećeg meseca ili se pomeriti jednu kategoriju gore ili dole. Stabilan klijent će biti rizičan, stabilan ili pouzdan sledećeg meseca sa jednakim verovatnoćama. Rizični i pouzdani klijenti će sledećeg meseca ostati u istoj kategoriji sa verovatnoćom p. Odrediti za koje p će klijent dugoročno provesti najviše vremena u stabilnoj kategoriji.

3. Počevši od vremena 0 autobusi pristižu na stanicu u skladu sa Poasonovim procesom sa parametrom λ (po času). Putnici pristižu u skladu sa nezavisnim Poasonovim procesom sa parametrom μ. Kada autobus pristigne na stanicu svi putnici koji u tom trenutku čekaju odmah ulaze u autobus, a svi naredni čekaju sledeći autobus. Odrediti vezu između broja autobusa koji pristignu u t sati, broja putnika koji pristignu u t sati i slučajnih promenljivih koje predstavljaju broj putnika koji uđu u $k-$ti autobus, $k \in \mathbb{N}$. Odrediti očekivani broj putnika koji uđu $m-$ti autobus.

4. Odrediti

$$E[aW_t^2 + W_sW_{2t} + bW_{t+s}W_s^2|\mathcal{W}_s], \quad 0 < s \leq t, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

ako je W_t, $t \geq 0$ standardno Braunovo kretanje, a $\mathcal{W}_t$ je istorija Braunovog kretanja do vremena t.

5. Dati su stohastički procesi

$$X_t = t^2(1 + tW_t), \quad Z_t = W_t^2 + X_t.$$

Naći dX_t i dZ_t.