Pismeni iz verovatnoće 29.6.2020.

1. Dva broda, nezavisno jedan od drugog i sa istim verovatnoćama stižu u luku u bilo kom trenutku u toku 24 časa. Ako luka može da opsluži samo jedan brod i ako se prvi brod zadržava u luci 1 sat, a drugi 2 sata, naći verovatnoću da će brod koji stigne drugi, morati da čeka.

   Rešenje:

   Neka je X vreme dolaska prvog broda, a Y dolazak drugog broda. Koristićemo geometrijsku definiciju verovatnoće. Skup svih mogućih događaja može se zapisati kao

   $$\Omega = [0, 24] \times [0, 24].$$

   Skup povoljnih događaja možemo opisati na sledeći način:

   $$y > x \wedge y - x < 1 \quad \vee \quad y < x \wedge y > x - 2,$$

   ili ekvivalentno

   $$x < y < 1 + x \quad \vee \quad x - 2 < y < x$$

   $$x - 2 < y < 1 + x, \quad x \in [0, 24]$$

   Površina ovog skupa je

   $$m(A) = 24^2 - 23^2/2 - 22^2/2,$$

   površina skupa Ω je $m(\Omega) = 24^2$, a onda je tražena verovatnoća

   $$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}.$$

2. U kutiji su 3 bele, 2 crne i 2 zelene kuglice. Na slučajan način se iz kutije izvlače 2 kuglice sa vraćanjem. Ako je X - broj izvučenih belih, a Y - broj izvučenih crnih kuglica, naći raspodelu vektora (X, Y) i ρ_{XY}. Uraditi zadatak i ako se izvlačenje kuglica vrši bez vraćanja.

   Rešenje:

   Sa vraćanjem Raspodela verovatnoća vektora (X, Y) je

$X \setminus Y$	0	1	2	
0	4/49	8/49	4/49	16/49
1	12/49	12/49	0	24/49
2	9/49	0	0	9/49
	25/49	20/49	4/49	1

$$E(X) = \frac{42}{49},\ E(X^2) = \frac{60}{49},\ E(Y) = \frac{28}{49},\ E(Y^2) = \frac{36}{49},\ E(XY) = \frac{12}{49}$$

$$\rho_{XY} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = -\frac{3}{\sqrt{30}}$$

   Bez vraćanja Raspodela verovatnoća vektora (X, Y) je

$X \setminus Y$	0	1	2	
0	2/42	8/42	2/42	12/42
1	12/42	12/42	0	24/42
2	6/42	0	0	6/42
	20/42	20/42	2/42	1

$$E(X)=\frac{36}{42},\ E(X^2)=\frac{48}{42},\ E(Y)=\frac{24}{42},\ E(Y^2)=\frac{28}{42},\ E(XY)=\frac{12}{42}$$

$$\rho_{XY}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=-\frac{3}{\sqrt{30}}$$

3. Neka je O koordinatni početak, X slučajna tačka na x-osi i S tačka sa koordinatama $(0,1)$. Pretpostavimo da ugao OSX ima uniformnu raspodelu na intervalu $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Odrediti funkciju raspodele i funkciju gustine slučajne promenljive X. Da li ova slučajna promenljiva ima očekivanje?

   Rešenje:

   Ako skiciramo, vidimo da je $X=\tan\alpha$, gde je $\alpha=\angle OSX$. Odavde, $\alpha(x)=\arctan(x)$ i funkcija gustine za X je

$$\begin{aligned}\varphi_X(x)&=\varphi_\alpha(\alpha(x))\cdot\alpha'(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2},\quad \arctan(x)\in[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\\&=\frac{1}{\pi(1+x^2)},\quad x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

   Ova raspodela naziva se Košijeva raspodela. Očekivanje ne postoji jer integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|x|}{\pi(1+x^2)}dx$$

   divergira.

4. Data je slučajna promenljiva Y sa eksponencijalnom raspodelom i parametrom $\lambda=1$. Definišimo niz slučajnih promenljivih $Y_n=\frac{Y}{n}$, $n\in\mathbb{N}$.

   (a) Ispitati konvergenciju u verovatnoći.

   (b) Da li je sledeće tvrđenje tačno: Za svako $\varepsilon>0$ i $c>0$ postoji $n_0\in\mathbb{N}$ takvo da za sve $n\geq n_0$ važi $P\{|Y_n|\geq c\}<\varepsilon$? Obrazložiti.

   Rešenje:

   (a) Kako je $E(Y_n)=\frac{1}{n}E(Y)\to 0$ ispitujemo da li Y_n konvergira u verovatnoći ka 0 kada $n\to\infty$. Treba pokazati da za svako $\varepsilon>0$, $P\{|Y_n-0|\geq\varepsilon\}\to 0$, $n\to\infty$.

$$P\{|Y_n-0|\geq\varepsilon\}=P\{Y_n\geq\varepsilon\}=P\{Y\geq n\varepsilon\}=e^{-n\varepsilon}\to 0,\ \text{kada } n\to\infty.$$

   (b) Da, tačno je. Neka su $\varepsilon>0$ i $c>0$ proizvoljni. Za takvo c važi $P\{|Y_n|\geq c\}\to 0,\ n\to\infty$ (iz zadatka pod a)). Ovo dalje znači da za izabrano ϵ postoji n_0 tako da za sve $n\geq n_0$ važi $P\{|Y_n|\geq c\}<\varepsilon$.

5. Svake 3 sekunde na ekranu se pojavljuje po jedan kvadrat. Dužine stranica kvardrata su međusobno nezavisne i uniformno raspoređene na intervalu (1cm, 2cm). Kvadrati se ređaju jedan do drugog sa ciljem da se pokrije veći kvadrat stranice 0.6m. Pretpostavimo da će veliki kvadrat biti pokriven kada je zbir površina manjih kvadrata veća za $10\ cm^2$ od površine velikog kvadrata. Odrediti verovatnoću da se za 30 minuta prekriti ceo veliki kvadrat.

   Rešenje: Neka je sa X_i označena dužina stranice $i-$tog kvadrata. Tada je površina tog kvadrata $Y_i=X_i^2$. Dalje, 30 minuta = 1800 sekundi, što znači da će za 30 minuta izaći tačno $n=600$ malih kvadrata.

$$E(Y_i)=E(X_i^2)=\int_1^2 x^2dx=\frac{7}{3},\quad E(Y_i^2)=\int_1^2 x^4dx=\frac{31}{5},\quad D(Y_i)=\frac{31}{5}-(\frac{7}{3})^2=\frac{34}{45}$$

   Neka je $S_{600}=\sum_{k=1}^{600}Y_i$ ukupna površina koju će ispuniti mali kvadrati u 30 minuta. Koristeći centralnu graničnu teoremu dobijamo

$$P(S_{600}>3600+10)=P\Big(S^*_{600}>\frac{3610-600\cdot\frac{7}{3}}{\sqrt{600\cdot\frac{34}{45}}}\Big)=0.5-\Phi\Big(\frac{2210}{\sqrt{1360/3}}\Big)=0.5-\Phi(4.875)=0.$$