Verovatnoća
20. jul 2020. godine

1. Zamislite mačku, otrov, gajgerov brojač, neku količinu radioaktivne materije i čekić u zapečaćenom kontejneru. Koncentracija radioaktivnog materijala stavljenog u kontejner je uniformna slučajna promenljiva definisana na intervalu (0,250) rem. U 10% slučajeva gajgerov brojač će detektovati smrtonosnu dozu radioaktivnog materijala iako ona nije prisutna i u 5% slučajeva je neće detektovati iako jeste prisutna. Ako gajgerov brojač detektuje radijaciju, čekić će osloboditi otrov koji će ubiti mačku. Doza radijacije koja u 60% slučajeva uzrokuje smrt je bar 200 rem i smatra se da je to smrtonosna doza. U suprotnom, prisutna koncentracija radioktivnog materijala neće prouzrokovati smrt. Odrediti verovatnoću da eksperiment prouzrokuje smrt kod mačke.

Inspirisano Šredingerovim eksperimentom.

Solution:

$H_0 -$ smrtonosna doza prisutna, gajgerov brojač je nije detektovao, $\quad P(H_0) = 0.2 \cdot 0.05 = 0.01$
$H_1 -$ smrtonosna doza prisutna, gajgerov brojač je detektovao, $\quad P(H_1) = 0.2 \cdot 0.95 = 0.19$
$H_2 -$ smrtonosna doza nije prisutna, gajgerov brojač je detektovao, $\quad P(H_2) = 0.8 \cdot 0.1 = 0.08$
$H_3 -$ smrtonosna doza nije prisutna, gajgerov brojač potvrdio, $\quad P(H_3) = 0.72$
$A -$ mačka umire

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(H_0)P(A|H_0) + P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) \\
&= 0.01 \cdot 0.6 + 0.19 \cdot 1 + 0.08 \cdot 1 + 0.72 \cdot 0 = 0.276.
\end{aligned}
$$

2. Slučajne veličine $X, Y : \mathcal{E}(1)$ su nezavisne. Odrediti gustinu raspodele slučajne promenljive $Z = \dfrac{X}{X+Y}$.

Možda korisno:
$$\int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt = (n-1)!$$

3. (a) Dokazati da je zbir n nezavisnih slučajnih promenljivih $X_1, \ldots, X_n$ sa Poasonovom raspodelom i parametrom λ slučajna promenljiva koja takođe ima Poasonovu raspodelu, ali sa parametrom $n\lambda$.

   (b) Broj miševa koji protrče kroz šupu u toku jednog sata prati Poasonovu raspodelu sa parametrom 0.25 miševa po satu, nezavisno od sata. Mačak Laza miševe sa zadovoljstvom lovi, ali je malo lenj i ne voli kada mora da čeka da se oni pojave. Zbog toga s vremena na vreme izabere trenutak kada će se pojaviti u šupi i čeka sat vremena ili dok ne protrči prvi miš. Laza je iskusan lovac i svakog miša kojeg zapazi će skoro sigurno uloviti. Odrediti verovatnoću da Lazin lov bude uspešan.

   (c) Jedno veče je Laza ostao bez večere koju mu je pojeo komšijski pas. Da ne bi ostao gladan, naredna 4 sata će provesti u šupi i nada se da će uloviti bar 2 miša. Odrediti verovatnoću da nije u pravu.

   (d) Ako pretpostavimo da Laza svaki dan u šupi provodi po četiri sata, približno odrediti broj dana koji će mu biti potrebno da sa verovatnoćom 0.5 ulovi više od 1000 miševa.

Rešenje:

(a) Radili na vezbama, $X_1 + \ldots + X_n : \mathcal{P}(\lambda n)$.

(b) $X : \mathcal{P}(0.25)$ predstavlja broj miševa koji protrče kroz šupu u toku jednog sata. Tražimo $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - e^{-0.25}$.

(c) $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 : \mathcal{P}(4 \cdot 0.25)$. Trazimo $P(Y < 2) = P(Y = 0) + P(Y = 1) = e^{-1}(1 + 1)$.

(d) Neka X_i predstavlja broj miševa koji su protrčali kroz šupu u toku $i-$tog sata (što je isto što i broj uhvaćenih miševa). Imamo $X_i : \mathcal{P}(0.25)$, $E(X_i) = D(X_i) = 0.25$. Ako je S_n broj uhvaćenih miševa u toku n sati, onda

$$P\{S_n > 1000\} = P\Big\{S_n^* > \frac{1000 - n0.25}{\sqrt{0.25n}}\Big\} = 0.5 - \Phi\Big(\frac{1000 - n0.25}{\sqrt{0.25n}}\Big) = 0.5$$

ako je $1000 - n0.25 = 0$, tj. $n = 4000$ sati što je 1000 dana.

4. Neka je $X_n : \mathcal{U}[-n, n],\ n = 1, 2, ...$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih i neka je $Y_n = \dfrac{X_n}{1 + X_n}$. Ispitati srednje kvadratnu konvergenciju niza Y_n.

Rešenje: Kandidat za graničnu vrednost:

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= \int_{-n}^{n} \frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{2n} dx \\ &= \frac{1}{2n} \int_{-n}^{n} (1 - \frac{1}{1+x}) dx = 1 - \frac{1}{2n} \ln\left|\frac{1+n}{1-n}\right| \to 1,\ za\ n \to \infty \end{aligned}$$

Srednje kvadratna konvergencija:

$$\begin{aligned} E((Y_n - 1)^2) &= E((-\frac{1}{1+X_n})^2) = \int_{-n}^{n} \frac{1}{(1+x)^2} \frac{1}{2n} dx \\ &= -\frac{1}{1+x}\Big|_{-n}^{n} \frac{1}{2n} = (-\frac{1}{1+n} + \frac{1}{1-n}) \frac{1}{2n} \to 0 \end{aligned}$$