Pismeni zadatak iz Verovatnoće 2.6.2020.

1. Na ispitu iz Verovatnoće svaki student izvlači po dva pitanja od ukupno 20. Pitanja su podeljena u dve kategorije: tešku i laku. Teških pitanja ima ukupno 5. Student je sigurno položio ispit ako je znao odgovor na oba pitanja. U slučaju da je izvukao jedno teško pitanje koje ne zna, ima mogućnost da ga zameni teškim, a ispit će položiti ako zna odgovor i na to novo pitanje. Inače ga neće položiti. Izračunati verovatnoću da student položi ako se zna da nije naučio dva teška pitanja (sve ostale jeste)?

   Rešenje: Neka je dat događaj $A = \{\text{student je položio ispit}\}$. Definišimo hipoteze: H_1-student je izvukao dva laka pitanja, H_2-student je izvukao jedno lako pitanje i jedno teško koje zna, H_3-student je izvukao jedno lako pitanje i jedno teško koje ne zna, H_4-student je izvukao oba teška pitanja koja zna, H_5-student je izvukao jedno teško pitanje koja ne zna i jedno koje zna, H_6-student je izvukao oba teška pitanja koja ne zna.

$$P(H_1) = \frac{\binom{15}{2}}{\binom{20}{2}},\ P(H_2) = \frac{15\cdot 3}{\binom{20}{2}},\ P(H_3) = \frac{15\cdot 2}{\binom{20}{2}},\ P(H_4) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{20}{2}},\ P(H_5) = \frac{3\cdot 2}{\binom{20}{2}}, P(H_6) = \frac{1}{\binom{20}{2}},$$

$$P(A|H_1) = 1,\ P(A|H_2) = 1,\ P(A|H_3) = \frac{3}{4},\ P(A|H_4) = 1,\ P(A|H_5) = \frac{2}{3},\ P(A|H_6) = 0.$$

$$P(A) = \sum_{k=1}^{6} P(A|H_k)P(H_k) = \frac{1}{\binom{20}{2}}\Big(150 + \frac{3}{4}\cdot 30 + 3 + \frac{2}{3}\cdot 6\Big) = \frac{359}{380}.$$

2. Student vežba zadatke za pismeni iz Verovatnoće. Vreme koje mu je potrebno da reši jedan zadatak, kao i pauza koju pravi između rešavanja dva zadatka se mogu modelirati kao slučajne promenljive sa eksponencijalnom raspodelom. Pretpostavimo da su sva vremena međusobno nezavisna, tj. da su vremena rešavanja zadataka, kao i pauze između njih nezavisna jedna od drugih i da je prosečno vreme potrebno da se reši jedan zadatak 15 minuta, a očekivana pauza između rešavanja dva zadatka pola sata.

   (a) Odrediti funkciju gustine slučajne promenljive koja modelira ukupno vreme potrebno da student provežba n zadataka (vreme od početka prvog zadatka do kraja $n-$tog).

   (b) Naći očekivano vreme, kao i standardno odstupanje vremena potrebnog da student provežba n zadataka.

   Rešenje: Neka su

$$X_i - \text{vreme potrebno da student reši } i - \text{ti zadatak}$$
$$Y_i - \text{pauza između } i - \text{tog i } (i+1) - \text{og zadatka}$$

   Ukupno vreme potrebno da student reši n zadataka je $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{k=1}^{n-1} Y_i$, gde $X_i : \mathcal{E}(4)$, $Y_i = \mathcal{E}(2)$ (vreme u satima).

   (a) Ovde smo slučajno zakomplikovale više nego što smo planirale pa smo priznavale sve smislene pokušaje. Dve sume navedene iznad imaju Erlangovu raspodelu koju smo obradjivali na vežbama (preko karakterističnih funkcija). Zadatak se može rešiti ukoliko se iskoriste te gustine, pa se gustina za Z nadje preko dvodimenzionalnih transformacija.

   (b) $E(Z) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) + \sum_{k=1}^{n-1} E(Y_i) = \dfrac{n}{4} + \dfrac{n-1}{2} = \dfrac{3n-2}{4}$ i $D(Z) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) + \sum_{k=1}^{n-1} D(Y_i) = \dfrac{n}{4^2} + \dfrac{n-1}{2^2}$. Standardno odstupanje je $\sqrt{D(Z)}$.

3. Slučajne promenljive $X_n,\ n = 1, 2, ...$ imaju $\mathcal{U}(0, \frac{1}{n})$ raspodelu, a slučajne promenljive $Y_n,\ n = 1, 2, ...$, nezavisne od $X_n,\ n = 1, 2...$ su date zakonom raspodele:

$$Y_n : \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, ...$$

Ispitati sve četiri vrste konvergencije niza $Z_1, Z_2, ...$ datog sa

$$Z_n = X_n + Y_n, \quad n = 1, 2, ...$$

Rešenje:

$$E(Z_n^2) = \frac{4}{3n^2} \to 0, \quad n \to \infty$$

iz čega slede srednja kvadratna konvergencija ka $Z = 0$, a zatim iz konvergencija u verovatnoći i raspodeli. Zatim $P(A_n^\varepsilon) = P(|Z_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(Z_n^2)}{\varepsilon^2}$, pa $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^\varepsilon)$ konvergira i zaključujemo da Z_n konvergira ka Z skoro sigurno kada $n \to \infty$.

4. Pretpostavimo da je broj osoba koje se zaraze virusom COVID-19 u toku jednog dana slučajna promenljiva sa Poasonovom raspodelom sa prosečnom stopom $\lambda = 100$. Pretpostavimo i da su brojevi zaraženih u više dana nezavisne slučajne promenljive. Odrediti verovatnoću da se za 56 dana vanrednog stanja zarazi do 5700 osoba (smatramo da je 56 dovoljno veliki broj; za $X : \mathcal{P}(\lambda)$ važi $E(X) = D(X) = \lambda$).

Rešenje:

Neka X_i predstavlja broj zaraženih u i-tom danu. Treba odrediti

$$P\{\sum_{i=1}^{56} X_i \leq 5700\}.$$

Primenjujemo CGT:

$$\begin{aligned}
P\Big\{\sum_{i=1}^{56} X_i \leq 5700\Big\} &= P\Big\{X^* \leq \frac{5700 - 56E(X_i)}{\sqrt{56D(X_i)}}\Big\} \\
&= P\Big\{X^* \leq \frac{5700 - 56 \cdot 100}{\sqrt{56 \cdot 100}}\Big\} \\
&= \phi(1.336) - \phi(-\infty) \\
&= 0.409 + 0.5 = 0.909
\end{aligned}$$