Stohastička analiza
27.1.2020.

1. Bogataš igra niz igara. Ulog u $n-$toj igri je 1 ili 2 dolara i zavisi od ishoda u prethodnoj igri. Ako je izgubio u $(n-1)-$oj igri, ulog u $n-$toj će biti 1 i verovatnoća da će pobediti u $n-$toj igri je $\frac{1}{2}$. U tom slučaju će zaraditi 1 dolar, dok će u suprotnom izgubiti dolar koji je uložio. Ako je pobedio u $(n-1)-$oj igri, ulog u $n-$toj će biti 2 i verovatnoća da će pobediti u toj igri je $\frac{1}{3}$. U tom slučaju će zaraditi 2 dolara, dok će u suprotnom izgubiti 2 dolara koje je uložio. Označimo sa X_n slučajnu promenljivu koja predstavlja dobit u $n-$toj igri,

$$X_n : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Sa X_0 je označeno početno stanje. Neka je $Y_n = \operatorname{sgn} X_n$, $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Pronaći $E(X_n|Y_{n-1})$.

(b) Odrediti matricu prelaza za jedan korak Lanca Markova $\{Y_n\}$. Izračunati procenat igara koje će bogataš izgubiti.

(c) Da li je Lanac Markova $\{Y_n\}$ stacionaran? Objasniti.

(d) Izračunati verovatnoće p_i, $i = 1, 2, 3, 4$ i $E(X_n)$.

2. Vremena smrti osiguranika neke osiguravajuće kuće se posmatraju kao vremena pristizanja zahteva za islatu osiguranja i broj preminulih osiguranika se ponaša u skladu sa Poasonovim procesom X_t sa stopom rasta 2 po danu. Neka je sa Z_n označen ukupan iznos koji se isplaćuje na ime $n-$tog osiguranika koji je preminuo i neka su Z_n nezavisne slučajne promenljive sa uniformnom raspodelom između 1000 i 5000 evra. Odrediti očekivan iznos koji osiguravajuća kuća treba da isplati u periodu od 5 dana, kao i disperziju.

3. Dat je stohastički proces $X_t = 2W_t + \sqrt{t}$, gde je sa W_t označeno standardno Braunovo kretanje.

(a) Proveriti da li je sledeće tvrđenje tačno

$$E(X_t^2|\mathcal{W}_s) = X_s^2, \quad s \in A = \{x > 0 : F_{X_t}(x) < 0.5\}.$$

(b) Da li je proces X_t^2 martingal u odnosu na istoriju Braunovog kretanja $\mathcal{W}_t$?

(c) Odrediti stohastički diferencijal dX_t^2 i izraziti ga preko X_t.