Stohastička analiza
27.1.2020.

1. Bogataš igra niz igara. Ulog u $n-$toj igri je 1 ili 2 dolara i zavisi od ishoda u prethodnoj igri. Ako je izgubio u $(n-1)-$oj igri, ulog u $n-$toj će biti 1 i verovatnoća da će pobediti u $n-$toj igri je $\frac{1}{2}$. U tom slučaju će zaraditi 1 dolar, dok će u suprotnom izgubiti dolar koji je uložio. Ako je pobedio u $(n-1)-$oj igri, ulog u $n-$toj će biti 2 i verovatnoća da će pobediti u toj igri je $\frac{1}{3}$. U tom slučaju će zaraditi 2 dolara, dok će u suprotnom izgubiti 2 dolara koje je uložio. Označimo sa X_n slučajnu promenljivu koja predstavlja dobit u $n-$toj igri,

$$X_n : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Sa X_0 je označeno početno stanje. Neka je $Y_n = \operatorname{sgn} X_n$, $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Pronaći $E(X_n|Y_{n-1})$.

(b) Odrediti matricu prelaza za jedan korak Lanca Markova $\{Y_n\}$. Izračunati procenat igara koje će bogataš izgubiti.

(c) Da li je Lanac Markova $\{Y_n\}$ stacionaran? Objasniti.

(d) Izračunati verovatnoće p_i, $i = 1, 2, 3, 4$ i $E(X_n)$.

Rešenje:

(a)

$$E(X_n|Y_{n-1}) : \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} \\ p_1 + p_2 & p_3 + p_4 \end{pmatrix}$$

i važi $E(X_n) = E(E(X_n|Y_{n-1})) = -\frac{2}{3}(p_3 + p_4)$.

(b) Matrica prelaza

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Finalne verovatnoće

$$p^*_{-1} = \frac{4}{7}, \quad p^*_1 = \frac{3}{7}.$$

(c) Lanac Markova je stacionaran, jer Y_n, $n \in \mathbb{N}_0$ imaju istu raspodelu, pa važi $p_1 + p_2 = \frac{4}{7}$, $p_3 + p_4 = \frac{3}{7}$.

(d) Verovatnoće su

$$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{2}{7}, \quad p_4 = \frac{1}{7}.$$

2. Vremena smrti osiguranika neke osiguravajuće kuće se posmatraju kao vremena pristizanja zahteva za islatu osiguranja i broj preminulih osiguranika se ponaša u skladu sa Poasonovim procesom X_t sa stopom rasta 2 po danu. Neka je sa Z_n označen ukupan iznos koji se isplaćuje na ime $n-$tog osiguranika koji je preminuo i neka su Z_n nezavisne slučajne promenljive sa uniformnom raspodelom između 1000 i 5000 evra. Odrediti očekivan iznos koji osiguravajuća kuća treba da isplati u periodu od 5 dana, kao i disperziju.

Rešenje: Imamo složen Poasonov proces N_t i

$$E(N_5) = 30000, \quad D(N_5) = \frac{31}{3}10^7.$$

3. Dat je stohastički proces $X_t = 2W_t + \sqrt{t}$, gde je sa W_t označeno standardno Braunovo kretanje.

(a) Proveriti da li je sledeće tvrđenje tačno

$$E(X_t^2|\mathcal{W}_s) = X_s^2, \quad s \in A = \{x > 0 : F_{X_t}(x) < 0.5\}.$$

(b) Da li je proces X_t^2 martingal u odnosu na istoriju Braunovog kretanja $\mathcal{W}_t$?

(c) Odrediti stohastički diferencijal dX_t^2 i izraziti ga preko X_t.

Rešenje:

(a) Imamo $A = (0, \sqrt{t}]$ i

$$\begin{aligned} E(X_t^2|\mathcal{W}_s) &= 4E(W_t^2|\mathcal{W}_s) + 4\sqrt{t}E(W_t|\mathcal{W}_s) + t \\ &= 4(t-s) + 4W_s^2 + 4\sqrt{t}W_s + t = 4(t-s) + X_s^2 \neq X_s^2, \quad s \in A. \end{aligned}$$

(b) X_t^2 nije martingal, jer $E(X_t^2|\mathcal{W}_s) \neq X_s^2$ za $s < t$

(c) $X_t^2 = 4W_t^2 + 4\sqrt{t}W_t + t = u(t, W_t)$, gde $u(t,x) = 4x^2 + 4\sqrt{t}x + t$. Važi

$$u_t = \frac{2}{\sqrt{t}}x + 1, \quad u_x = 8x + 4\sqrt{t}, \quad u_{xx} = 8$$

Itova formula daje

$$dX_t^2 = (\frac{2}{\sqrt{t}}W_t + 1 + 4)dt + 4(2W_t + \sqrt{t})dW_t = \Big(\frac{1}{\sqrt{t}}X_t + 4\Big)dt + 4X_t dW_t$$