Stohastička analiza – pismeni ispit
17.6.2019.

1. Igra se igra na sreću. Mašina redom izbacuje cifre 0 i 1 na ekranu sa verovatnoćama $1-p$ i p, redom. Igra se završava kada se prvi put pojavi 0. Ako je ulog u igri jednak $a > 0$, osvojena suma je jednaka ukupnom zbiru svih cifara koje su se pojavile na ekranu u toj igri. Odrediti očekivani iznos koji će igrač osvojiti u jednoj igri? Izračunati verovatnoću p takvu da je igra fer (ulog je jednak dobitku).

Rešenje:

Preko uslovnog očekivanja $E(N|\mathcal{F}(A))$, N je slučajna promenljiva koja predstavlja broj cifara, a A je događaj: prva cifra je nula, dobijamo: Očekivani iznos koji će osvojiti je $E(N) - 1 = \frac{1}{1-p} - 1 = \frac{p}{1-p}$. Igra je fer ako je $E(N) - 1 = a$. Dakle, $p = \frac{a}{1+a}$.

2. Mehanički uređaj proizvodi male "šokove" u skladu sa Poasonovim procesom sa stopom rasta 0.1 po satu. Uređaj prestaje da radi kad se dogodi ukupno K šokova. Odrediti očekivani vek trajanja T tog uređaja. Naći verovatnoće da će se K i $K-1$ šok dogoditi posle $E(T)$ sati i uporediti te vrednosti.

Rešenje: $X_t : \mathcal{P}(0.1t)$ i

$$P(X_{E(T)} = K) = e^{-0.1\cdot 10K}\frac{(0.1\cdot 10K)^K}{K!} = e^{-K}\frac{K^K}{K!} = P(X_{E(T)} = K-1).$$

3. Posmatramo posudu koja na početku sadrži r crvenih i b crnih kuglica. Uzastopna izvlačenja kuglica se vrše na sledeći način: posle svakog izvlačenja izvučena kuglica se vraća i dodaje se a kuglica iste boje (r, b i a su prirodni brojevi). Neka je sa $\{Y_n\}$ označen niz slučajnih promenljivih takvih da $Y_n = 1$ ako je $n-$ta izvučena kuglica crvena i $Y_n = 0$ ako je $n-$ta izvučena kuglica crna. Neka r_n i b_n redom predstavljaju broj crvenih i crnih kuglica u posudi posle $n-$tog izvlačenja.

(a) Neka je Z_n broj crvenih kuglica u posudi posle $n-$tog izvlačenja. Izraziti Z_n kao funkciju od slučajnih promenljivih $Y_1, \dots, Y_n$. Dokazati da niz $\{Z_n\}$ čini lanac Markova i odrediti verovatnoće prelaza za jedan korak. Da li je lanac Markova $\{Z_n\}$ homogen ili nehomogen?

(b) Neka je sa X_n označen udeo crvenih kuglica u posudi posle $n-$tog izvlačenja, tj. $X_n = \frac{r_n}{r_n+b_n}$. Dokazati da je $\{X_n\}$ martingal u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_n\}$, gde $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}(Y_1, \dots, Y_n)$.

Rešenje:

(a) Ukupan broj kuglica u posudi posle $n-$tog izlačenja je $r + b + n\cdot a$. To znači da

$$P\{Z_{n+1} = r_{n+1}|Z_n = r_n, Z_{n-1} = r_{n-1}, \dots, Z_0 = r\} = P\{Z_{n+1} = r_{n+1}|Z_n = r_n\}$$

i $\{Z_n\}$ je nehomogen lanac Markova. Verovatnoće prelaza za jedan korak su

$$P\{Z_{n+1} = r_{n+1}|Z_n = r_n\} = \begin{cases} \frac{r+b+an-r_n}{r+b+an}, & r_{n+1} = r_n \\ \frac{r_n}{r+b+an}, & r_{n+1} = r_n + a \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

(b) $E(|X_n|) < \infty$ važi, jer $0 \le X_n \le 1$. Takođe, $X_n = \frac{Z_n}{r+b+an}$ je funkcija koja zavisi od $Y_1, \dots, Y_n$, jer $Z_n = f(Y_1, \dots, Y_n)$. Dakle, X_n je adaptiran u odnosu na filtraciju $\mathcal{F}_n$.

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) =& E(X_{n+1}|Z_n = r_n) \\ =& P\{Y_{n+1} = 0\}E\Big(\frac{r_n + aY_{n+1}}{r+b+a(n+1)}|Y_{n+1} = 0\Big) + P\{Y_{n+1} = 1\}E\Big(\frac{r_n + aY_{n+1}}{r+b+a(n+1)}|Y_{n+1} = 1\Big) \\ =& \frac{r+b+an-r_n}{r+b+an}\frac{r_n}{r+b+a(n+1)} + \frac{r_n}{r+b+an}\frac{r_n+a}{r+b+a(n+1)} = X_n. \end{aligned}$$

4. Dat je stohastički proces X_t sa stohastičkim diferencijalom $dX_t = -\frac{1}{t}(dt + dW_t)$, pri čemu je sa W_t označeno standardno Braunovo kretanje. Pronaći stohastički proces čiji je stohastički diferencijal jednak $\frac{dY_t}{e^{X_t}} + \frac{1}{2}\frac{W_t}{t}dt$, gde $Y_t = -tW_t e^{X_t}$.
Ideja: Koristiti Itovu formulu za $d = 2$.

Rešenje:

Dobijamo,

$$\frac{dY_t}{dt} + \frac{W_t}{2t}dt = d\Big(\frac{W_t^2}{2}\Big) + dA_t, \text{ gde } A_t = \int_0^t \frac{1}{2}ds - \int_0^t s\, dW_s.$$

Traženi stohastički proces je $Z_t = \dfrac{W_t^2 + t}{2} - \displaystyle\int_0^t s\, dW_s$.