

Stohastička analiza

28. avgust 2019.

1. Rasejan profesor ima dva kišobrana koja koristi u putu od kuće do posla i nazad. Ako pada kiša i kišobran mu je dostupan na trenutnoj lokaciji, on ga uzima. Ako ne pada kiša, on uvek zaboravi da uzme kišobran. Pretpostavimo da svaki put kada on putuje kiša pada sa verovatnoćom p i da ta verovatnoća ne zavisi od prethodnih putovanja. U svakom trenutku on ima dostupno 0, 1 ili 2 kišobrana na trenutnoj lokaciji. Pretpostavimo da je profesor na početku imao 2 kišobrana na trenutnoj lokaciji. Naći verovatnoću da on na istoj lokaciji sledećeg dana (tj. posle dva putovanja) neće imati 2 kišobrana.

Rešenje: Verovatnoća da na istoj lokaciji sledećeg dana neće imati 2 kišobrana je $p(1 - p)$.

2. Taxi vozila polaze sa aerodroma skladu sa Poasonovim procesom sa stopom rasta od 2 po minutu. Verovatnoće da se u vozilu nalazi jedna, dve ili tri osobe su 0.5, 0.3 i 0.2, redom.
- Odrediti verovatnoću da je broj vozila koja su krenula sa aerodroma u 10 minuta jednak 10.
 - Odrediti očekivan broj putnika koji su krenuli sa aerodroma u 10 minuta.

Rešenje:

- $P(X_{10} = 10) = e^{-20} \frac{20^{10}}{10!}$.
- $N_t = \sum_{k=1}^{X_t} Y_k$ i $E[N_{10}] = 34$.

3. Neka je dato standardno Braunovo kretanje W_t .

- Dokazati da su slučajne promenljive $X := W_{2s}^2 + W_s^2 + 3W_{2s} - 3W_s - 2W_{2s}W_s$ i $Y := W_{\frac{1}{2}s}^3 - W_{\frac{1}{2}s}^2 + 2$ nezavisne za $s > 0$.
- Naći $E[X + Y|W_s]$.

Rešenje:

- Slučajne promenljive

$$X = (W_{2s} - W_s)^2 + 3(W_{2s} - W_s) = f(W_{2s} - W_s), \quad Y = g(W_{\frac{1}{2}s} - W_0)$$

su nezavisne.

- $E[X + Y|W_s] = \frac{1}{2}s + 2$.

4. Dati su stohastički procesi $Y_t = 2t \int_0^t (e^s + 1) dW_s$ i $Z_t = \int_0^t \frac{1}{e^s + 1} dW_s$, gde je sa W_t označeno standardno Braunovo kretanje.

- Naći $dY_t \cdot dZ_t$.
- Odrediti $E\left(\int_0^t (e^s + 1) dW_s \int_0^t \frac{1}{e^s + 1} dW_s\right)$.

Rešenje:

- $dY_t \cdot dZ_t = 2t(e^t + 1)dW_t \cdot \frac{1}{e^t + 1}dW_t = 2tdt$.
- $E\left(\int_0^t (e^s + 1) dW_s \int_0^t \frac{1}{e^s + 1} dW_s\right) = E\left(\int_0^t (e^s + 1) \frac{1}{e^s + 1} ds\right) = t$.

5. Dat je Poasonov proces N_t sa stopom rasta λ . Da li je $N^2(t) - \lambda t$ martingal u odnosu na istoriju Poasonovog procesa?

Rešenje: Nije martingal.