Stohastička analiza

11.9.2019.

1. Dat je stohastički proces $X_t = -2 + (t+1)Y$, $t \in \mathbb{R}$, gde

$$Y : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/3 & 1/4 & 5/12. \end{pmatrix}$$

Odrediti jednodimenzionalnu funkciju raspodele $F_t(x)$ procesa X_t. Koju vrednost može da primi x da bi važilo $F_0(x) = 7/12$?

Rešenje: Ako $t > -1$,

$$F_t(x) = F_Y\Big(\frac{x+2}{t+1}\Big),$$

dok za $t < -1$ važi

$$F_t(x) = 1 - P\{Y = \frac{x+2}{t+1}\} - F_Y\Big(\frac{x+2}{t+1}\Big).$$

Dalje,

$$F_0(x) = F_Y(x+2) = \frac{7}{12} \text{ ako i samo ako } 2 < x+2 \leq 3.$$

Dakle, $0 < x \leq 1$.

2. U razredu ima n studenata i rezultat $i-$tog studenta na testu je x_i. Studenti su podeljeni u k disjunktnih skupova $A_1, \ldots, A_k$ i u skladu sa tim su podeljeni u sekcije. Neka je sa n_s označen broj studenata u sekciji s. Tada je prosečan (očekivan) rezultat u sekciji s jednak

$$m_s = \frac{1}{n_s} \sum_{i \in A_s} x_i.$$

Odrediti očekivan rezultat slučajno izabranog studenta i dokazati da dobijena vrednost ne zavisi od m_s i n_s, $s = 1, \ldots, k$.

Rešenje:

$$E(X) = E(E(X|\mathcal{F}(A_1, \ldots, A_k))) = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} m_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j \in A_i} x_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

3. Matrica prelaza za jedan korak lanca Markova je data sa

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

gde $b, c > 0$. Neka je sa $E = \{0, 1, 2\}$ označen odgovarajući skup stanja.

(a) Da li je lanac Markova ergodičan? Da li se nešto može zaključiti o postojanju finalnih verovatnoća? Objasniti.

(b) Naći vektor početnih stanja za koji je lanac Markova stacionaran.

(c) Navesti sva povratna stanja iz skupa E.

Rešenje:

(a) Imamo

$$P^2 = Q := \begin{bmatrix} b & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & c \end{bmatrix}, \quad P^3 = P, \quad \ldots, P^{2k-1} = P, \quad P^{2k} = Q,$$

pa lanac Markova nije ergodičan. Finalne verovatnoće ne postoje.

(b) Za $p_0 = (x_0, x_1, x_2)$ lanac Markova je stacionaran ako

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_0 = bx_1, \quad x_2 = cx_1.$$

(c) Sva stanja iz E su povratna, jer za svako $i \in E$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da $p_{ii}(n_0) > 0$.

4. (a) Pretpostavimo da kompanija poseduje dve licence (A i B) za automobile koje proizvodi u skladu sa Poasonovim procesom sa stopom rasta 1 po danu. Ako se zna da jedan u deset automobila padne na završnom testiranju, odrediti verovatnoću da je više od jednog automobila palo na završnom testiranju u 10 dana.

(b) Ako se dve kategorije automobila proizvode nezavisno ali svaka proizvodnja prati Poasonov proces sa stopom 0.5 po danu, odrediti verovatnoću da neće biti proizvedeno više od jednog automobila (bez obzira na kategoriju) u periodu od 10 dana.

Rešenje:

(a) $X_t : \mathcal{P}(t)$ i $X_{1,t} : \mathcal{P}(0.1t)$ i važi

$$P(X_{1,10} > 1) = 1 - P(X_{1,10} = 0) - P(X_{1,10} = 1) = 1 - e^{-1}(1+1) = 1 - 2e^{-1}.$$

(b) $p = 3e^{-10}$.

5. Dat je stohastički proces $Y_t = 2e^{t + \int_{t_0}^t s^2\, ds + \int_{t_0}^t e^s\, dW_s}$ koji je rešenje neke stohastičke diferencijalne jednačine. Odrediti tu jednačinu.

Rešenje:

$$dY_t = Y_t(1 + t^2 + \frac{1}{2}e^{2t})dt + e^t Y_t dW_t, \quad Y_{t_0} = 2e^{t_0}.$$

6. Dat je niz nezavisnih i ograničenih slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \ldots$ (tj. $|X_k| \leq a < \infty$). Neka je $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Naći dovoljan uslov da bi $S_n^2 - E(S_n^2)$ bio diskretan martingal u odnosu na filtraciju $\mathcal{F}_n$, gde $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Rešenje:

$$E[S_{n+1}^2 - E(S_{n+1}^2)|\mathcal{F}_n] = S_n^2 - E(S_n^2) + 2E(X_{n+1})(S_n - E(S_n)),$$

i $S_n^2 - E(S_n^2)$ je martingal ako $E(X_{n+1}) = 0$.