Stohastička analiza – pismeni ispit
1.2.2019.

1. Studenti čekaju rezultate testa koji su radili. Nastavnik im je rekao da će rezultate moći da vide za tačno 2 sata sa verovatnoćom $\frac{1}{2}$ ili za tačno 6 sati sa verovatnoćom $\frac{1}{3}$. Inače, rezultate će dobiti tokom časa koji će početi za tačno 20 sati i trajaće 2 sata (smatra se da je u tom slučaju rezultate mogu da dobiju bilo kada u toku dva sata). Neka je sa X označena slučajna promenljiva koja je nezavisna od slučajne promenljive Y koja predstavlja vreme čekanja studenata. Izračunati $E(Y|X + \mathrm{sgn}X)$.

Rešenje:

$E(Y|X + \mathrm{sgn}X) = E(Y|X) = E(Y) = 6.5$, jer su Y i X nezavisne.

2. Petar je odlučio da smrša, pa će u narednom periodu ponekad ići na posao peške. Pretpostavimo da dan, nezavisno od prethodnog, može biti klasifikovan kao kišan sa verovatnoćom p. Inače je dan sunčan. Ako je dan kišan, Petar će ići na posao autom, bez obzira na to kako je išao prethodnog dana. Ako je dan sunčan, Petrova odluka zavisi od prethodnog dana. Ako je prethodnog dana išao na posao autom i dan je sunčan on će sigurno ići peške na posao. Ako je prethodnog dana išao peške i dan je sunčan, jednako je verovatno da će izabrati da na posao ide peške i autom. Posmatrano dugoročno koja je verovatnoća da će Petar ići na posao autom.

Rešenje:

Skup stanja je $\{\text{F-foot}, \text{C-car}\}$. Verovatnoće prelaza za jedan korak su

$$\begin{aligned}
P\{X_{n+1} = F|X_n = C\} =& P\{\text{dan je sunčan}\} = 1 - p \\
P\{X_{n+1} = C|X_n = C\} =& P\{\text{dan je kišovit}\} = p \\
P\{X_{n+1} = F|X_n = F\} =& P\{\text{dan je sunčan}\}P\{\text{ići će peške}|\text{dan je sunčan}\} = \frac{1-p}{2} \\
P\{X_{n+1} = C|X_n = F\} =& P\{\text{dan je sunčan}\}P\{\text{ići će automobilom}|\text{dan je sunčan}\} \\
&+ P\{\text{dan je kišovit}\}P\{\text{ići će automobilom}|\text{dan je kišovit}\} \\
=& \frac{1-p}{2} + p = \frac{1+p}{2}.
\end{aligned}$$

Finalne verovatnoće iz $\mathbf{p}^*$ zadovoljavaju sistem

$$p_F^* = (1-p)p_C^* + \frac{1}{2}(1-p)p_F^*, \quad p_C^* + p_F^* = 1$$

Odgovor je p_C^*.

3. Paketi kategorije B se dopremaju u poštu u skladu sa Poasonovim procesom sa stopom od 20 paketa po satu. Statistički podaci pokazuju da težina svakog paketa ima normalnu raspodelu sa očekivanjem $3432\,g$ i standardnom devijacijom $482\,g$.

(a) Odrediti verovatnoću da će slučajno izabran paket kategorije B imati između 3000 i $4000\,g$?

(b) Pronaći verovatnoću da će u naredna 2 sata biti dopremljeno 40 paketa kategorije B sa težinom između 3000 i $4000\,g$. Odrediti prosečno vreme između dva uzastopna dopremanja paketa kategorije B.

Rešenje:

(a) Tražena verovatnoća $P\{3000 < X \leq 4000\} \approx 0.6956 =: p$.

(b) Tražena verovatnoća je

$$P\{N_{1,2} = 40\} = \frac{(40p)^{40}}{40!}e^{-40p}.$$

Prosećno vreme je $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{20}$ sata (= 3 minuta).

4. Dati su dva puta neprekidno-diferencijabilna funkcija $u = u(x)$, standardno Braunovo kretanje W_t i stohastički proces $Y_t = tu^2(W_t)$. Odrediti dY_t.

Rešenje:

$$dY_t = (u^2(W_t) + t(u'(W_t))^2 + u(W_t)u''(W_t))dt + 2tu(W_t)u'(W_t)dW_t.$$

5. Neka je dat stohastički proces X_t sa stacionarnim i nezavisnim priraštajima, očekivanjem jednakim nula i disperzijom $\sigma_X^2 t$. Dokazati da je $Z_t = a(X_t^2 - \sigma_X^2 t) + Y_t$, $a \in \mathbb{R}$, martingal u odnosu na istoriju stohastičkog procesa X_t zaključno sa vremenom t, ako je Y_t martingal u odnosu na istu filtraciju.

Rešenje: Koristimo da je Y_t martingal i

$$E[a(X_t^2 - \sigma_X^2 t)|\mathcal{F}_s] = a\sigma_X^2(t-s) + aX_s^2 - a\sigma_X^2 t = aX_s^2 - a\sigma_X^2 s.$$