Verovatnoća – pismeni ispit
27. januar 2020.

1. U kutiji se nalazi n belih, n crnih i $(n-1)-$na crvena kuglica ($n \geq 3$). U prvom krugu su slučajno i odjednom izvučene dve kuglice iz te kutije i umesto izvučenih su vraćene dve crvene. Zatim je izvučena još jedna kuglica. Koja je verovatnoća da je ta kuglica crvena?

   Rešenje: Imamo tri hipoteze:

   - H_0 - u prvom krugu je izvučeno 0 crvenih kuglica
   - H_1 - u prvom krugu je izvučena jedna crvena kuglica
   - H_2 - u prvom krugu su izvučene 2 crvene kuglice

   Važi
$$P(H_1) = \frac{2n(n-1)}{\binom{3n-1}{2}}, \quad P(H_2) = \frac{\binom{n-1}{2}}{\binom{3n-1}{2}}, \quad P(H_0) = 1 - \frac{\binom{n-1}{2} + 2n(n-1)}{\binom{3n-1}{2}}.$$
   Definišimo događaj A - u drugom krugu je izvučena crvena kuglica. Tada
$$\begin{aligned}P(A) &= P(A|H_0)P(H_0) + P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2)\\ &= \frac{n+1}{3n-1}\left(1 - \frac{\binom{n-1}{2} + 2n(n-1)}{\binom{3n-1}{2}}\right) + \frac{n}{3n-1}\frac{2n(n-1)}{\binom{3n-1}{2}} + \frac{n-1}{3n-1}\frac{\binom{n-1}{2}}{\binom{3n-1}{2}}\end{aligned}$$

2. Neka X ima normalnu $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelu, a $Y = g(X)$, gde je
$$g(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0,\\ \sqrt{x}, & x > 0.\end{cases}$$
   Naći funkciju gustine slučajne promenljive Y. Izraziti funkciju raspodele slučajne promenljive Y preko F_X.

   Rešenje: Funkcija gustine je
$$\varphi_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{y^2}{2}} + 2ye^{-\frac{y^4}{2}}\right), & y > 0\\ 0, & y \leq 0,\end{cases}$$
   a funkcija raspodele je
$$\begin{aligned}F_Y(y) &= \int_0^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^y 2te^{-\frac{t^4}{2}}dt\\ &= F_X(y) - F_X(0) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{y^2} e^{-s^2/2}ds, \quad \text{(smena)}\\ &= F_X(y) - F_X(0) + F_X(y^2) - F_X(0)\\ &= F_X(y) + F_X(y^2) - 1 \quad (F_X(0) = 1/2),\end{aligned}$$
   za $y > 0$ i $F_Y(y) = 0$ za $y \leq 0$.

   II način
$$\begin{aligned}F_Y(y) &= P\{Y < y\} = P\{-y < X < y^2\} = F_X(y^2) - F_X(-y)\\ &= F_X(y^2) - (1 - F_X(y)) = F_X(y^2) + F_X(y) - 1,\\ \varphi_Y(y) &= F_Y'(y) = 2yF_X'(y^2) + F_X'(-y) = 2y\varphi_X(y^2) + \varphi_X(-y),\ y > 0.\end{aligned}$$

3. Neka su X i Y nezavisne slučajne promenljive sa normalnom $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelom. Par (X,Y) može biti opisan preko polarnih koordinata pomoću slučajnih promenljivih $R \geq 0$ i $\Theta \in [0, 2\pi]$:

$$X = R\cos\Theta, \quad Y = R\sin\Theta.$$

Odrediti $\varphi_{(R,\Theta)}(r,\theta)$, a zatim i marginalne gustine za R i Θ. Da li su R i Θ nezavisne?

Rešenje:

$$\begin{aligned}\varphi_{(R,\Theta)}(r,\theta) &= \varphi_{(X,Y)}(x(r,\theta), y(r,\theta)) \cdot |J| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(r\cos\theta)^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(r\sin\theta)^2/2} \cdot r = r\frac{1}{2\pi} e^{-r^2/2},\ r \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi].\end{aligned}$$

Marginalne gustine su dalje,

$$\begin{aligned}\varphi_R(r) &= \int_0^{2\pi} \frac{r}{2\pi} e^{-r^2/2} d\theta = re^{-r^2/2}, r \geq 0, \\ \varphi_\Theta(\theta) &= \int_0^{\infty} \frac{r}{2\pi} e^{-r^2/2} dr = \frac{1}{2\pi},\ \theta \in [0, 2\pi].\end{aligned}$$

R i Θ jesu nezavisne jer $\varphi_{(R,\Theta)}(r,\theta) = \varphi_R(r)\varphi_\Theta(\theta)$.

4. Niz slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \ldots$ takvih da $E(X_n) = \frac{12}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$ konvergira u srednje kvadratnom ka slučajnoj promenljivoj X kada $n \to \infty$.

   (a) Pokazati da za proizvoljnu slučajnu promenljivu Y važi $E(Y^2) \geq E^2(Y)$.

   (b) Pokazati da važi $\lim_{n\to\infty} E(X_n) = E(X)$.

   (c) Da li funkcija $f(t) = e^{2e^{it}-it-2}$ može biti karakteristična funkcija slučajne promenljive X?

Rešenje:

   (a) Nejednakost sledi iz $E(Y^2) = D(Y) + E^2(Y) \geq E^2(Y)$.

   (b) Iz srednje kvadratne konvergencije sledi $E((X_n - X)^2) \to 0$, $n \to \infty$, pa iz

$$0 \leq E^2(X_n - X) = (E(X_n) - E(X))^2 \leq E((X_n - X)^2) \to 0,$$

   sledi $E(X_n) \to E(X)$, $n \to \infty$.

   (c) Kako je $E(X_n) \to 0$, $n \to \infty$ sledi $E(X) = 0$. Ako je $f(x)$ karakteristična funkcija slučajne promenljive X onda mora da važi $E(X) = \frac{1}{i} f'(0)$. Važi

$$f'(t) = e^{2e^{it}-it-2} i(2e^{it} - 1).$$

   Dakle, dobijamo $E(X) = 1 \neq 0$, pa $f(t)$ nije karakteristična funkcija slučajne promenljive X.

5. Da bi student stekao pravo za upis na doktorske studije matematike potrebno je da njegova prosečna ocena na prethodna dva nivoa studija ne bude manja od 8.00. Pretpostavimo da je ocena koju će student dobiti na proizvoljnom predmetu slučajna promenljiva X sa raspodelom

$$X : \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \frac{1}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

i da ocena koju će student dobiti na nekom predmetu ne zavisi od ostalih. Odrediti verovatnoću da će student steći uslov za upis na doktorske studije ako je na prethodna dva nivoa studija (osnovne i master) polagao ukupno 48 ispita (pretpostavljamo da je 48 dovoljno velik broj).

Rešenje: Neka je sa X_k označena slučajna promenljiva koja predstavlja ocenu studenta na $k-$tom ispitu. Zbir ocena dobijenih na n ispita je $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Imamo

$$E(X_k) = \frac{23}{3}, \quad D(X_k) = E(X_k^2) - E^2(X_k) = \frac{718}{12} - \frac{23^2}{9} = \frac{38}{36}.$$

Iz nezavisnosti sledi

$$E(S_{48}) = 16 \cdot 23, \quad D(S_{48}) = \frac{48 \cdot 38}{36}.$$

Koristeći Centralnu graničnu teoremu dobijamo

$$\begin{aligned} P\Big(\frac{S_{48}}{48} \geq 8\Big) &= P(S_{48} \geq 8 \cdot 48) = P\Big(S_{48}^* \geq 6\frac{8 \cdot 48 - 16 \cdot 23}{4\sqrt{114}}\Big) \\ &= P\Big(S_{48}^* \geq \frac{24}{\sqrt{114}}\Big) \approx \Phi(\infty) - \Phi(2.25) = 0.5 - 0.488 = 0.012. \end{aligned}$$