Stohastička analiza – pismeni ispit
17.6.2019.

1. Igra se igra na sreću. Mašina redom izbacuje cifre 0 i 1 na ekranu sa verovatnoćama $1-p$ i p, redom. Igra se završava kada se prvi put pojavi 0. Ako je ulog u igri jednak $a > 0$, osvojena suma je jednaka ukupnom zbiru svih cifara koje su se pojavile na ekranu u toj igri. Odrediti očekivani iznos koji će igrač osvojiti u jednoj igri? Izračunati verovatnoću p takvu da je igra fer (ulog je jednak dobitku).

2. Mehanički uređaj proizvodi male "šokove" u skladu sa Poasonovim procesom sa stopom rasta 0.1 po satu. Uređaj prestaje da radi kad se dogodi ukupno K šokova. Odrediti očekivani vek trajanja T tog uređaja. Naći verovatnoće da će se K i $K-1$ šok dogoditi posle $E(T)$ sati i uporediti te vrednosti.

3. Posmatramo posudu koja na početku sadrži r crvenih i b crnih kuglica. Uzastopna izvlačenja kuglica se vrše na sledeći način: posle svakog izvlačenja izvučena kuglica se vraća i dodaje se a kuglica iste boje (r, b i a su prirodni brojevi). Neka je sa $\{Y_n\}$ označen niz slučajnih promenljivih takvih da $Y_n = 1$ ako je $n-$ta izvučena kuglica crvena i $Y_n = 0$ ako je $n-$ta izvučena kuglica crna. Neka r_n i b_n redom predstavljaju broj crvenih i crnih kuglica u posudi posle $n-$tog izvlačenja.

(a) Neka je Z_n broj crvenih kuglica u posudi posle $n-$tog izvlačenja. Izraziti Z_n kao funkciju od slučajnih promenljivih $Y_1, \ldots, Y_n$. Dokazati da niz $\{Z_n\}$ čini lanac Markova i odrediti verovatnoće prelaza za jedan korak. Da li je lanac Markova $\{Z_n\}$ homogen ili nehomogen?

(b) Neka je sa X_n označen udeo crvenih kuglica u posudi posle $n-$tog izvlačenja, tj. $X_n = \frac{r_n}{r_n+b_n}$. Dokazati da je $\{X_n\}$ martingal u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_n\}$, gde $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}(Y_1, \ldots, Y_n)$.

4. Dat je stohastički proces X_t sa stohastičkim diferencijalom $dX_t = -\dfrac{1}{t}(dt + dW_t)$, pri čemu je sa W_t označeno standardno Braunovo kretanje. Pronaći stohastički proces čiji je stohastički diferencijal jednak $\dfrac{dY_t}{e^{X_t}} + \dfrac{1}{2}\dfrac{W_t}{t}dt$, gde $Y_t = -tW_t e^{X_t}$.
Ideja: Koristiti Itovu formulu za $d = 2$.