# Stohastička analiza

11.9.2019.

**1.** Dat je stohastički proces $X_t = -2 + (t+1)Y$, $t \in \mathbb{R}$, gde

$$Y : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/3 & 1/4 & 5/12. \end{pmatrix}$$

Odrediti jednodimenzionalnu funkciju raspodele $F_t(x)$ procesa $X_t$. Koju vrednost može da primi $x$ da bi važilo $F_0(x) = 7/12$?

**2.** U razredu ima $n$ studenata i rezultat $i-$tog studenta na testu je $x_i$. Studenti su podeljeni u $k$ disjunktnih skupova $A_1, \ldots, A_k$ i u skladu sa tim su podeljeni u sekcije. Neka je sa $n_s$ označen broj studenata u sekciji $s$. Tada je prosečan (očekivan) rezultat u sekciji $s$ jednak

$$m_s = \frac{1}{n_s} \sum_{i \in A_s} x_i.$$

Odrediti očekivan rezultat slučajno izabranog studenta i dokazati da dobijena vrednost ne zavisi od $m_s$ i $n_s$, $s = 1, \ldots, k$.

**3.** Matrica prelaza za jedan korak lanca Markova je data sa

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

gde $b, c > 0$. Neka je sa $E = \{0, 1, 2\}$ označen odgovarajući skup stanja.

(a) Da li je lanac Markova ergodičan? Da li se nešto može zaključiti o postojanju finalnih verovatnoća? Objasniti.

(b) Naći vektor početnih stanja za koji je lanac Markova stacionaran.

(c) Navesti sva povratna stanja iz skupa $E$.

**4.** (a) Pretpostavimo da kompanija poseduje dve licence (A i B) za automobile koje proizvodi u skladu sa Poasonovim procesom sa stopom rasta 1 po danu. Ako se zna da jedan u deset automobila padne na završnom testiranju, odrediti verovatnoću da je više od jednog automobila palo na završnom testiranju u 10 dana.

(b) Ako se dve kategorije automobila proizvode nezavisno ali svaka proizvodnja prati Poasonov proces sa stopom 0.5 po danu, odrediti verovatnoću da neće biti proizvedeno više od jednog automobila (bez obzira na kategoriju) u periodu od 10 dana.

**5.** Dat je stohastički proces $Y_t = 2e^{t + \int_{t_0}^t s^2\, ds + \int_{t_0}^t e^s\, dW_s}$ koji je rešenje neke stohastičke diferencijalne jednačine. Odrediti tu jednačinu.

**6.** Dat je niz nezavisnih i ograničenih slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \ldots$ (tj. $|X_k| \leq a < \infty$). Neka je $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Naći dovoljan uslov da bi $S_n^2 - E(S_n^2)$ bio diskretan martingal u odnosu na filtraciju $\mathcal{F}_n$, gde $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.