Verovatnoća – pismeni ispit
28. avgust 2019.

1. Na slučaj način se bira tačka iz kvadrata sa temenima u $(-2\sqrt{2}, 0)$, $(0, -2\sqrt{2})$, $(2\sqrt{2}, 0)$ i $(0, 2\sqrt{2})$.

   (a) Koja je verovatnoća da će izabrana tačka pripadati kvadratu sa temenima u $(-\sqrt{2}, 0)$, $(0, -\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, 0)$ i $(0, \sqrt{2})$, ali neće pripadati krugu sa centrom u $(0, 0)$ i poluprečnikom 1?

   (b) Bira se još jedna tačka iz istog kvadrata, nezavisno od druge. Odrediti verovatnoću da će obe tačke pripadati krugu sa centrom u $(0, 0)$ i poluprečnikom 2.

   Rešenje:

   (a) $p_1 = \frac{4-\pi}{16}$

   (b) Iz nezavisnosti sledi $p_2 = \frac{4\pi}{16} \cdot \frac{4\pi}{16} = \frac{\pi^2}{16}$.

2. Odrediti konstante $a, b, c \in \mathbb{R}$ takve da je sa $F(x) = c + a \operatorname{arctg} \frac{x}{b}$, $x \in \mathbb{R}$ data funkcija raspodele neke slučajne promenljive i da vazi $P\{X < b\} = \frac{3}{4}$ i $P\{0 < X < 1\} = \frac{1}{4}$.

   Rešenje: Razdvajamo dva slučaja $b > 0$ i $b < 0$. Nije moguće $a = 0$, jer bi u tom slučaju F bila konstantna funkcija, dok u slučaju $b = 0$ ne bi važilo $0 \leq F(x) \leq 1$.
   Neka je prvo $b > 0$. Da bi F bila funkcija raspodele treba da važi

   (a) $F(-\infty) = c + a \operatorname{arctg}(-\infty) = 0$

   (b) $F(\infty) = c + a \operatorname{arctg}(+\infty) = 1$
   Iz dve jednačine dobijamo $c = \frac{1}{2}$ i $a = \frac{1}{\pi}$.

   (c) Kako je $F'(x) = \frac{a}{b} \frac{1}{1+(x/b)^2}$ zaključujemo da $F'(x) > 0$, jer a i b imaju isti znak. Dakle, F je rastuća funkcija.

   (d) Jasno je da je F neprekidna za sve $x \in \mathbb{R}$.

   U slučaju $b < 0$ dobijamo $c = \frac{1}{2}$ i $a = -\frac{1}{\pi}$, ostalo ide analogno.
   Dalje,

   $$P\{X < b\} = F(b) = \frac{1}{2} + a \operatorname{arctg}(1) = \frac{3}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{\pi}$$

   pa zaključujemo da je $b > 0$. Dodatno,

   $$P\{0 < X < 1\} = F(1) - F(0) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{1}{4},$$

   pa dobijamo $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{\pi}{4}$ iz čega sledi $b = 1$.

3. Deo elektronskog sistema ima dva tipa komponenti koje zajedno rade. Označimo sa X_1 i X_2 životni vek (meren u stotinama sati) komponente I i II, respektivno. Neka je zajednička funkcija gustine data sa

   $$\varphi_{(X_1,X_2)} = \begin{cases} \frac{1}{8} x_1 e^{-\frac{x_1+x_2}{2}}, & \text{za} \quad x_1 > 0,\ x_2 > 0, \\ 0, & \text{inace.} \end{cases}$$

   (a) Izračunati verovatnoću da će obe komponente imati životni vek duži od 100 sati, tj. naći $P\{X_1 > 1, X_2 > 1\}$.

   (b) Naći verovatnoću da će komponenta tipa II imati životni vek duži od 200 sati.

   (c) Da li su X_1 i X_2 nezavisne? Obrazložiti.

   Rešenje:

(a)

$$P\{X_1 > 1, X_2 > 1\} = \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{1}{8} x_1 e^{-\frac{x_1+x_2}{2}} dx_1 dx_2 = \int_1^\infty \frac{1}{8} x_1 e^{-x_1/2} dx_1 \int_1^\infty e^{-x_2/2} dx_2$$
$$= \int_1^\infty \frac{1}{8} x_1 e^{-x_1/2} dx_1 \cdot (-2) \cdot (-e^{-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{4} e^{-1/2} \cdot 6e^{-1/2} = \frac{3}{2e}.$$

(b)

$$\varphi_{X_2}(x_2) = \int_0^\infty \frac{1}{8} x_1 e^{-\frac{x_1+x_2}{2}} dx_1 = \frac{1}{8} e^{-x_2/2} \int_0^\infty x_1 e^{-x_1/2} dx_1 = \frac{1}{8} e^{-x_2/2} \cdot 4$$
$$= \frac{1}{2} e^{-x_2/2}, \quad x_2 > 0.$$
$$P\{X_2 > 2\} = \int_2^\infty \varphi_{X_2}(x_2) dx_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{e} = \frac{1}{e}$$

(c)

$$\varphi_{X_1}(x_1) = \frac{1}{8} x_1 e^{-x_1/2} \int_0^\infty e^{-x_2/2} dx_2 = \frac{1}{8} x_1 e^{-x_1/2} \cdot 2 = \frac{1}{4} x_1 e^{-x_1/2}, \quad x_1 > 0.$$

Pa sledi

$$\varphi_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) = \varphi_{X_1}(x_1) \varphi_{X_2}(x_2)$$

i X_1 i X_2 su nezavisne.

4. (a) Date su slučajne promenljive $X : \mathcal{U}(0, a)$, $a > 0$ i $Y = \max\{X, 1\}$. Odrediti $P\{|Y - 1| > \varepsilon\}$ ako je $\varepsilon > 0$.

   (b) Neka je dat niz nezavisnih slučajnih promenljivih $X_n : \mathcal{U}(0, n)$ i neka je $Y_n = \max\{X_n, 1\}$. Da li niz slučajnih promenljivih Y_n konvergira u verovatnoći ka 1 kada $n \to \infty$?

Rešenje:

(a)

$$P\{|Y-1| > \varepsilon\} = P\{Y - 1 > \varepsilon\} = P\{\max\{X, 1\} > 1 + \varepsilon\} = 1 - P\{\max\{X, 1\} \leq 1 + \varepsilon\}$$
$$= 1 - \begin{cases} \frac{1+\varepsilon}{a}, & \varepsilon + 1 \leq a \\ 1, & \varepsilon + 1 > a \end{cases} = \begin{cases} 1 - \frac{1+\varepsilon}{a}, & \varepsilon + 1 \leq a \\ 0, & \varepsilon + 1 > a. \end{cases}$$

(b) Na osnovu rezultata pod (a) vidimo da postoji $\varepsilon > 0$ takvo da $P\{|Y_n - 1| > \varepsilon\} \nrightarrow 0$ kada $n \to \infty$.

5. Na prekookeanskom letu se u avion utovaraju koferi sa težinama koje su nezavisne slučajne promenljive sa uniformnom raspodelom između 5 i 53 kg. Koja je verovatnoća da će ukupna težina 100 kofera preći 3300 kg?

Rešenje: Neka je sa X_i označena težina $i-$tog kofera. Tada $X_i : \mathcal{U}(5, 53)$ i $E[X_i] = \frac{58}{2} = 29$, $D[X_i] = \frac{48^2}{12} = 48 \cdot 4 = 64 \cdot 3$. Takođe, neka je sa S_n označena ukupna težina n kofera. Iz nezavisnosti sledi

$$E[S_{100}] = 2900, \quad D[S_{100}] = 100 \cdot 64 \cdot 3.$$

Koristeći Centralnu graničnu teoremu dobijamo

$$P\Big\{S_{100} > 3300\Big\} = P\Big\{S^*_{100} > \frac{3300 - 2900}{\sqrt{3} \cdot 80}\Big\} = P\Big\{\frac{5}{\sqrt{3}} < S^*_{100} < \infty\Big\} = 0.5 - \Phi\Big(\frac{5}{\sqrt{3}}\Big)$$
$$= 0.5 - \Phi(2.88) = 0.5 - 0.498 = 0.002.$$