Verovatnoća – pismeni ispit
17. jun 2019.

1. Nemanja svaki dan dobija džeparac u iznosu od 300 dinara i ponekad ne potroši ceo iznos. Pretpostavimo da će prvi dan potrošiti 100 ili 300 dinara sa verovatnoćama 1/4 ili 200 dinara sa verovatnoćom 1/2.

   (a) Pretpostavimo da Nemanjine odluke o tome koliko će novca potrošiti tokom jednog dana ne zavise od prethodnih dana i da svakog dana troši 100, 200 ili 300 dinara sa jednakim verovatnoćama kao prvog dana. Odrediti verovatnoću da će u prva dva dana uštedeti bar 300 dinara.

   (b) Neka sada odluka o potrošnji tokom jednog dana zavisi od prethodnog i neka je verovatnoća da će sledećeg dana potrošiti istu količinu novca kao prethodnog jednaka 1/4. Odrediti verovatnoću da će Nemanja u prva dva dana uštedeti 400 dinara.

   Rešenje: Označimo sledeće događaje

$$\begin{aligned} H_1 &: \text{Nemanja prvog dana troši 100 dinara,} \quad P(H_1) = \frac{1}{4} \\ H_2 &: \text{Nemanja prvog dana troši 200 dinara,} \quad P(H_2) = \frac{1}{2} \\ H_3 &: \text{Nemanja prvog dana troši 300 dinara,} \quad P(H_3) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

   (a) Neka je A događaj da je Nemanja u prva dva dana uštedeo bar 300 dinara. Iz nezavisnosti sledi

$$P(A) = P(H_1H_2) + P(H_2H_1) + P(H_1H_1) = \frac{1}{4}\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{1}{4} = \frac{5}{16}.$$

   (b) Označimo sada

$$\begin{aligned} S_1 &: \text{Nemanja drugog dana troši 100 dinara} \\ S_2 &: \text{Nemanja drugog dana troši 200 dinara} \\ S_3 &: \text{Nemanja drugog dana troši 300 dinara} \\ B &: \text{Nemanja je u prva dva dana uštedeo 400 dinara} \end{aligned}$$

   Dato je $P(S_i|H_i) = \frac{1}{4}$, pa sledi

$$P(B) = P(H_1S_1) = P(H_1)P(S_1|H_1) = \frac{1}{4}\frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

2. (a) Odrediti konstantu c tako da funkcija φ data sa $\varphi(x) = cxe^{-x^2+1}$ za $x \geq 1$ i $\varphi(x) = 0$ inače, bude funkcija gustine neke slučajne promenljive X.

   (b) Odrediti drugi momenat slučajne promenljive X. Da li slučajna promenljiva X ima očekivanje? Objasniti.

   (c) Izračunati $f_X''(0)$, ako je f_X karakteristična funkcija slučajne promenljive X.

   (d) Odrediti funkciju gustine slučajne promenljive $Y = \begin{cases} X^2 - 1, & X \leq 2 \\ X + 1, & X > 2. \end{cases}$

   Rešenje:

   (a) Kako je $\varphi(x) \geq 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$ i važi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx = \int_1^{\infty} cxe^{-x^2+1}\, dx = \frac{c}{2}\int_{-\infty}^{0} e^t\, dt = \frac{c}{2},$$

   zaključujemo da je φ funkcija gustine neke slučajne promenljive ako $c = 2$.

(b)
$$E(X^2) = \int_1^{\infty} 2x^3 e^{-x^2+1}\,dx = -x^2 e^{-x^2+1}\Big|_1^{\infty} + \int_1^{\infty} 2x^3 e^{-x^2+1}\,dx = 1 + 1 = 2.$$

Očekivanje slučajne promenljive X postoji, jer postoji momenat drugog reda.

(c) Važi $f_X''(0) = i^2 E(X^2) = -2$.

(d) Za $y \le 0$ imamo $F_Y(y) = 0$. Ako je $y \in (0, 3]$, važi

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{X < \sqrt{y+1}\} = \int_1^{\sqrt{y+1}} 2xe^{-x^2+1}\,dx = 1 - e^{-y}.$$

Dalje, za $y > 3$

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{X < y - 1\} = \int_1^{y-1} 2xe^{-x^2+1}\,dx = 1 - e^{-y^2+2y}.$$

Funkcija gustine slučajne promenljive Y je

$$\varphi_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ e^{-y}, & 0 < y \le 3 \\ 2(y-1)e^{-y^2+2y}, & y > 3. \end{cases}$$

$F_Y'(y)$ nije definisano u $y = 0$ i $y = 3$, pa smo φ_Y dodefinisali u tim tačkama.

3. Ako su $X_n : \mathcal{U}(0, n),\ n = 1, 2...$ nezavisne slučajne promenljive i $Y_n = \min\{X_n, 1\},\ n = 1, 2...$ pokazati da Y_n konvergira ka 1 u verovatnoći kada $n \to \infty$, ali Y_n ne teži skoro sigurno ka 1. Naći jedan podniz niza $Y_1, Y_2...$ koji konvergira skoro sigurno ka 1.

Rešenje:

$$P\{|Y_n - 1| \ge \varepsilon\} = P\{1 - Y_n \ge \varepsilon\} = P\{\min\{X_n, 1\} \le 1 - \varepsilon\} = P\{X_n \le 1 - \varepsilon\}$$
$$= \begin{cases} \frac{1-\varepsilon}{n}, & \varepsilon \in (0, 1) \\ 0, & \varepsilon < 1. \end{cases}$$

Odavde vidimo da Y_n konvergira ka 1 u verovatnoći, ali da ne konvergira ka 1 skoro sigurno (jer odgovarajući red divergira). Ako izaberemo na primer podniz $n_k = k^2$, dobijamo da red

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\varepsilon}{n_k}$$

konvergira, te $Y_{n_1}, Y_{n_2}, ...$ teži skoro sigurno ka 1.

4. Uređaj može imati defekt A sa verovatnoćom 0.01 i, nezavisno od toga, defekt B sa verovatnoćom 0.02. Uređaj je neispravan ako ima istovremeno oba defekta. Kupac prihvata seriju od 1000 uređaja ako u seriji nema više od k neispravnih uređaja. Odrediti k tako da kupac prihvati seriju sa verovatnoćom 0.999.

Rešenje:

Označimo sa X broj neispravnih uređaja u seriji od 1000 uređaja. Treba naći k tako da

$$P\{X \le k\} = 0.999.$$

X ima binomnu raspodelu sa $p = 0.01 \cdot 0.02 = 0.0002$ i $n = 1000$. Pošto je $np < 10$ binomnu raspodelu možemo aproksimirati Poasonovom $\mathcal{P}(0.2)$ pa imamo

$$\begin{aligned} P\{X \leq k\} &= \sum_{m=0}^{k} \frac{0.2^m}{m!} e^{-0.2} \\ &= 0.8187 + 0.1637 + 0.01637 + 0.00327... = 0.998 + 0.00327 + ... \end{aligned}$$

odakle vidimo da $k = 2$.

Drugi način je da iskoristimo CGT, ili ti njen specijalan slučaj Moavr-Laplasovu teoremu:

$$P\{X \leq k\} = P\{X^* \leq \frac{k - 0.2}{\sqrt{0.2 \cdot 0.9998}}\}.$$

Odavde sledi

$$\Phi(\frac{k - 0.2}{\sqrt{0.2 \cdot 0.9998}}) - \Phi(-\infty) = 0.999 \Rightarrow k \approx 1.$$