Stohastička analiza – pismeni ispit
3.9.2018.

1. (a) Nikola svaki mesec započinje sa 80 000 dinara na računu. Prvi dan u mesecu on plaća račune (ukupan iznos je 10 000 dinara), a drugog i petnaestog dana u mesecu ide u supermarket. Ukupan iznos koji on potroši u supermarketu je slučajna promenljiva

$$X : \begin{pmatrix} 5000 & 7000 & 8000 & 10000 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Ukupan iznos koji potroši bilo kog drugog dana je uniformno raspoređen u intervalu $(0, 2000)$. Označimo sa X_n ukupan iznos koji Nikola ima na računu $n-$tog dana u mesecu. Pretpostavimo da mesec ima 30 dana. Pronaći očekivani iznos koji će Nikola imati na računu $n-$tog dana u mesecu ako je iznos koji je imao na raspolaganju prethodnog dana poznat i pronaći očekivani iznos novca koji je Nikola potrošio tokom proizvoljno izabranog dana.

(b) Pretpostavimo da u proseku Nikola potroši više od 1000 dinara tokom dana svaki drugi dan. Odrediti verovatnoću da Nikola potroši više od 1000 dinara manje od dva puta u toku tri dana. Pretpostavljamo da Nikola vrši kupovinu samo jednom u toku dana.

2. Petar ovaj semestar pohađa kurs iz Stohastičke analize utorkom, četvrtkom i petkom. Nastava počinje u 10h. Petar je navikao da radi do kasno u noć, pa povremeno izostane sa časova. To da li će on pohađati čas jedan dan zavisi samo od toga da li je ili nije išao na prethodni čas. Ako je prisustvovao času jedan dan, sledeći put će prisutvovati času sa verovatnoćom $1/2$. A ako ne ode na čas jedan dan, na sledeći čas će otići sa verovatnoćom $3/4$.

(a) Naći lanac Markova koji opisuje Petrove dolaske na časove. Koja je verovatnoća da će prisustvovati času u četvrtak ako je išao na čas u petak?

(b) Odrediti verovatnoću da Petar pohađa čas.

(c) Pretpostavimo da kurs sadrži ukupno 30 časova. Dati ocenu broja časova na kojima je Petar prisustvovao i objasniti.

3. Dat je niz nezavisnih integrabilnih jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \ldots$ takvih da

$$\phi(\lambda) = E[e^{\lambda X_1}] < +\infty, \qquad \text{za neko } \lambda \neq 0.$$

Dokazati da je

$$M_n := \phi^{-n}(\lambda) e^{\lambda S_n}, \qquad \text{gde } S_n := \sum_{i=1}^{n} X_n$$

martingal u odnosu na filtraciju $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}(X_1, \ldots, X_n)$.

4. Dati su stohastički procesi $X_t = t(1 + 2W_t)$ i $Z_t = W_t^2 + X_t$.

(a) Naći dX_t.

(b) Odrediti konstantu α takvu da važi $\alpha\, dZ_t \cdot dW_t - t dt = W_t dt$.