

Stohastička analiza

17.9.2018.

- 1.** Data je zajednička funkcija gustine za (X, Y)

$$\varphi_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{1-e^{-1}}ye^{-x}, & x, y \in (0, 1), \\ 0, & x, y \notin (0, 1). \end{cases}$$

Odrediti autokovariansnu funkciju stohastičkog procesa $X_t = X + tY$.

- 2.** Igra se sledeća igra. Biraju se prirodni brojevi $N \geq 2$ i $s \leq N - 1$. U kutiji se na početku nalazi ukupno N belih i crnih kuglica, od čega je s belih. U svakom koraku izvači se po jedna kuglica i ponavlja se sledeći postupak. Ako je kuglica bela, ona se samo vraća u kutiju, a ako je crna, pored izabrane crne u kutiju se ubacuje jedna bela kuglica. Posmatra se lanac Markova koji predstavlja broj belih kuglica u kutiji posle n -tog izvlačenja.

- (a) Pronaći verovatnoće prelaza za jedan i dva koraka.
- (b) Igra se završava kada verovatnoća da posle d izvlačenja broj belih kuglica poraste za d nije veća od $1/30$. Odrediti minimalan broj izvlačenja potrebnih da se igra završi ako je $N = 2$, $s = 1$.

- 3.** Mušterije dolaze u berbernicu u skladu sa Poasonovim procesom sa stopom rasta 2 po satu. Mušterija dolazi da se ošisa sa verovatnoćom $2/3$, a da obrije bradu sa verovatnoćom $1/3$.

- (a) Odrediti verovatnoću da je 4 mušterije stiglo u berbernicu da se ošisa u prva četiri sata, ako je poznato da su 2 mušterije došle da se ošišaju u prva tri sata.
- (b) Odrediti očekivano vreme koje prođe između dva uzastopna dolaska mušterija koje hoće da se ošisaju.

- 4.** Dat je stohastički proces

$$X_t = (2-t) \int_0^t \frac{s}{2-s} dW_s, \quad t \in [0, 2].$$

- (a) Dokazati da je X_t , $t \in [0, 2]$ rešenje stohastičke diferencijalne jednačine

$$dX_t = -\left(\frac{X_t}{2-t}\right)dt + t dW_t, \quad X_0 = 0.$$

- (b) Izračunati $E(X_t)$ i $E(X_t Z_t)$, ako je stohastički proces Z_t dat sa

$$Z_t = \int_0^t (2-s) dW_s.$$

- 5.** (a) Odrediti funkciju $f = f(s, t, x)$ za koju važi

$$P\{W_t < 5\sqrt{t}\}E[W_t^2 W_s^2 | \mathcal{W}_s] + W_s^2 E[W_{2s} | \mathcal{W}_s] = W_s^2 f(s, t, W_s), \quad 0 < s \leq t,$$

ako je sa W_t dato standardno Braunovo kretanje, a sa \mathcal{W}_t istorija Braunovog kretanja do trenutka t .

- (b) Odrediti $E[f(s, t, W_s)]$.