Stohastička analiza – pismeni ispit
18.6.2018.

1. Dva kockara igraju sledeću igru. Baca se fer novčić. Ako je rezultat glava, igrač A će platiti igraču B jedan dolar, a ako je rezultat pismo, igrač B će platiti igraču A jedan dolar. Igra se nastavlja sve dok jedan igrač ne ostane bez novca. Pretpostavimo da na početku igrač A ima jedan dolar, a igrač B 2 dolara (što znači da je u igri tri dolara). Neka X_n predstavlja količinu novca koju poseduje igrač A posle n bacanja novčića.

(a) Naći očekivani broj bacanja novčića dok jedan od igrača ne ostane bez dolara.

(b) Pokazati da je X_n lanac Markova i naći verovatnoće prelaza za jedan korak.

(c) Koja je verovatnoća da je igra završena nakon samo jednog bacanja novčića?

(d) Pronaći verovatnoće prelaza za dva koraka $P[X_{n+2} = i | X_n = i]$, $i = 1, 2$.

2. Sateliti se lansiraju u svemir prema Poasonovom procesu sa stopom 2 po godini. Vreme koje svaki satelit (nezavisno od ostalih) provede u svemiru pre nego sto padne na zemlju je eksponencijalno raspoređeno sa srednjom vrednošću 40 godina. Odrediti očekivani broj satelita koji će pasti na zemlju posle 20 godina.

3. Naći

$$E[\alpha W_t + W_t W_s + \beta W_r^2 W_s | \mathcal{W}_t], \qquad 0 < s \le t < r,$$

ako je W_t, $t \ge 0$ standardno Braunovo kretanje i $\mathcal{W}_t$ je istorija Braunovog kretanja do vremena t (uključujući i vreme t).

4. Pokazati da je sa

$$Y_t = e^{-2\int_0^t s^2\,ds + 2\int_0^t s\,dW_s} + t$$

dato rešenje stohastičke diferencijalne jednačine

$$dY_t = dt + 2t(Y_t - t)\,dW_t, \qquad Y_0 = 1.$$

5. Dat je niz nezavisnih, jednako raspoređenih slučajnih promenljivih

$$X_n : \begin{pmatrix} -6 & -2 & 2 & 6 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Dokazati da je $\gamma_n = \cos(\pi n) \sin\left(\frac{\pi}{2} S_n\right)$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, martingal u odnosu na filtraciju $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}(X_1, \ldots, X_n)$.