

Stohastička analiza – pismeni ispit
25.01.2018.

1. Prepostavljamo da par posle n godina braka može da ima najviše n dece. Neka je slučajna promenljiva koja predstavlja broj dece posle tačno 3 godine braka data sa

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Ako Y predstavlja broj ženske dece posle tačno 3 godine braka, odrediti $E(X|F(Y))$.

2. U nekim državama postoji zakonska granica na broj dece koje par može da ima u braku. Neka je ta granica 4, tj. par ne može da ima više od 4 dece u braku. Neka X_t predstavlja broj dece nakon t godina braka. Takođe, prepostavljamo da broj dece ne može da se smanji. Poznato je da će broj dece posle jedne godine ostati isti sa verovatnoćom 0.5, osim u slučaju kada par već ima četvoro dece. Ako je na kraju jedne godine broj dece k , $k = 0, 1, 2$, tada će na kraju sledeće godine broj dece biti $k + 1$ sa verovatnoćom $\frac{1}{k+2}$. Ako par ima jedno dete, broj dece će porasti za dva nakon 2 godine sa verovatnoćom $1/4$.
- (a) Pronaći matricu prelaza za jedan korak lanca Markova $\{X_n\}$.
- (b) Da li je lanac Markova $\{X_n\}$ ergodičan?
3. Broj beba koje se rode u Srbiji tokom t uzastopnih dana se ponaša u skladu sa Poasonovim procesom. U proseku, jedna beba se rodi na svakih 60 sekundi. Ako je poznato da u jednom od 10 slučajeva beba nije otpuštena iz bolnice nakon 5 dana, pronaći verovatnoću da u toku dva uzastopna dana, broj beba koje nisu otpuštene iz bolnice posle 5 dana nije veći od 2.
4. Neka je sa $W(t)$, $t \geq 0$ dato standardno Braunovo kretanje.

- (a) Dokazati da za sve $s \geq t \geq 0$ važi

$$E(W(s)W^n(t)) = \begin{cases} 0, & \text{ako } n = 2k, k = 0, 1, 2, \dots \\ n!! t^{\frac{n+1}{2}}, & \text{ako } n = 2k - 1, k = 1, 2, \dots \end{cases}.$$

- (b) Pokazati $E(|W(t) - W(s)|^2) = |t - s|$, $t, s \geq 0$.

Ideja: Izračunati $E(W^{n+1}(t))$.

5. Dat je stohastički proces $X_t = t + W_t$, pri čemu je sa W_t označeno standardno Braunovo kretanje. Odrediti $dY_t \cdot dZ_t$ ako su procesi Y_t i Z_t dati sa

$$Y_t = X_t^2, \quad \text{i} \quad Z_t = tX_t.$$