

Lanci Markova - zadaci

1. Verovatnoće prelaza u lancu Markova su date matricom

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

- (a) Da li je dati lanac homogen?
 - (b) Koliko iznosi p_{13} i p_{23} ?
 - (c) Naći $p_{13}(2)$.
 - (d) Naći P_2 .
2. Koristeći jednačine Čepmen-Kolmogorova naći verovatnoće prelaza iz prvog u drugo stanje za 3 koraka kod homogenog lanca Markova sa matricom prelaza

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Neka lanac Markova X_n , $n \in \mathbb{N}_0$ predstavlja socijalni status (klasu) n -te generacije neke porodice. Socijalne klase su date na sledeći način:

1 – niža, 2 – srednja, 3 – viša.

Promene klasa su date matricom prelaza:

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

- (a) Kolika je verovatnoća da osoba čiji su roditelji u srednjoj klasi bude u višoj klasi i da su deca takve osobe u nižoj klasi?
 - (b) Kolika je verovatnoća da deca osobe čiji roditelji su u srednjoj klasi budu u nižoj klasi?
4. Matrica prelaza u homogenom lancu Markova je data sa

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Iz koliko najmanje koraka se može preći iz drugog u treće stanje?
 - (b) Iz koliko najmanje koraka se može preći iz drugog u četvrto stanje?
5. Tačka se kreće po celobrojnoj rešetki na pravoj, prelazeći iz stanja i u stanje $i-1, i, i+1$ sa verovatnoćama $1/3$ bez obzira na to kako je došla do stanja i .
- (a) Odrediti verovatnoće prelaza za dva koraka.

- (b) Ako X_n označava stanje sistema u trenutku n , naći $E(X_3|X_1 = 1)$.
6. Pokazati da lanac Markova sa matricom prelaza $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ nije ergodičan.
7. Dokazati da je lanac Markova dat matricom prelaza $P = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ ergodičan i naći finalne verovatnoće.
8. Trgovački putnik prodaje robu u Novom Sadu, Zrenjaninu i Subotici. Nikad ne prodaje 2 dana uzastopno u istom gradu. Ako jednog dana prodaje u Zrenjaninu, sutradan sigurno prodaje u Subotici. Posle Subotice ili Novog Sada sa duplo većom verovatnoćom prelazi u Zrenjanin nego u onaj drugi grad.
- (a) Koliki deo dugog vremenskog perioda će putnik provesti u kom gradu?
- (b) Ako je u ponedeljak radio u Novom Sadu, kolika je verovatnoća da u sredu (prvu po redu) neće opet raditi u Novom Sadu?
9. Statistički podaci iz 1990. godine pokazuju da 88% stanovnika Zagreba živi u sopstvenom stanu, a ostali iznajmljuju stan. U narednih 10 godina 3% vlasnika prelazi u podstanare i 8% podstanara postaju vlasnici stanova. Odrediti procenat vlasnika stanova u 2000. godini i u 2010. godini.
10. Ana svakog jutra za doručak piće čaj ili kafu. Ako je jednog dana pila čaj, sledećeg dana sa istim verovatnoćama piće čaj ili kafu, a ako je pila kafu, onda sledećeg dana sigurno piće čaj.
- (a) Naći matricu prelaza za jedan i dva koraka. Da li je dati lanac ergodičan?
- (b) Za vektor početnih verovatnoća $p(0) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ ispitati da li je dati lanac stacionaran. Da li će za neki drugi početni vektor verovatnoća lanac biti stacionaran?
- (c) Odrediti (ako postoje) finalne verovatnoće.
11. Muva leti kroz stan oblika kao na slici, pri čemu uvek menja prostoriju sa verovatnoćom koja je obrnuto proporcionalna broju izlaza iz prostorije. Kada muva izađe napolje (stanje 3), više se ne vraća unutra.
- (a) Odrediti matricu prelaza P .
- (b) Dokazati da dati lanac nije ergodičan.
- (c) Odrediti (ako postoje) finalne verovatnoće.
12. Biraju se prirodni brojevi $N \geq 2$ i $s \leq N - 1$. U kutiji se na početku nalazi ukupno N belih i crnih kuglica, od čega je s belih. U svakom koraku izvrači se po jedna kuglica i ponavlja se sledeći postupak. Ako je kuglica bela, ona se samo vraća u kutiju, a ako je crna, pored izabrane crne u kutiju se ubacuje jedna bela kuglica. Posmatra se lanac Markova koji predstavlja broj belih kuglica u kutiji posle n -tog izvlačenja.
- (a) Pronaći verovatnoće prelaza za jedan i dva koraka.
- (b) Igra se završava kada verovatnoća da posle d izvlačenja broj belih kuglica poraste za d nije veća od $1/30$. Odrediti minimalan broj izvlačenja potrebnih da se igra završi ako je $N = 2$, $s = 1$.

