Verovatnoća – pismeni ispit i rešenja (M3 smer)
24. januar 2019.

1. Vladimir je dobio tri kupona za ručak u *Dva štapića* i četiri za ručak u *Restoranu 10* (kuponi iz istog restorana se međusobno ne razlikuju). Prvog dana Vladimir slučajno izvlači jedan kupon, ali na ručak vodi i druga pa troši dva kupona u restoranu čiji je kupon izvukao, dok drugog i trećeg dana izvlači po jedan kupon od preostalih i ide sam na ručak. Odrediti verovatnoću da će Vladimir trećeg dana ručati u *Dva štapića*, kao i verovatnoću da će Vladimir sva tri dana ručati u *Dva štapića.*

Rešenje: Neka je sa A označen događaj da Dušan trećeg dana ruča u *Dva štapića.* Označimo događaje

$$H_1 : \text{Vladimir prvog dana ruča u } \textit{Dva štapića}$$
$$B_1 : \text{Vladimir drugog dana ruča u } \textit{Dva štapića}$$

Imamo $P(H_1) = \frac{3}{7}$ i $P(B_1) = P(H_1)P(B_1|H_1) + P(\overline{H_1})P(B_1|\overline{H_1}) = \frac{3}{7}\frac{1}{5} + \frac{4}{7}\frac{3}{5} = \frac{3}{7}$. Važi

$$P(A) = \sum_{k=1}^{4} P(A|A_k)P(A_k),$$

gde

$$A_1 = H_1B_1, \quad A_2 = H_1\overline{B_1}, \quad A_3 = \overline{H_1}B_1, \quad A_4 = \overline{H_1}\ \overline{B_1}$$

i

$$P(A_1) = P(H_1)P(B_1|H_1) = \frac{3}{7}\frac{1}{5},\ P(A_2) = \frac{3}{7}\frac{4}{5},\ P(A_3) = \frac{4}{7}\frac{3}{5},\ P(A_4) = \frac{4}{7}\frac{2}{5},$$

pa dobijamo

$$P(A) = \frac{3}{35}\cdot 0 + \frac{12}{35}\cdot\frac{1}{4} + \frac{12}{35}\cdot\frac{2}{4} + \frac{8}{35}\cdot\frac{3}{4} = \frac{60}{20\cdot 7} = \frac{3}{7}.$$

Verovatnoća da će Vladimir sva tri dana ručati u *Dva štapića* je

$$P(H_1B_1A) = P(H_1B_1)P(A|H_1B_1) = 0,$$

jer bi u tom slučaju bila potrebna 4 kupona iz *Dva štapića.*

2. Slučajan vektor (X, Y) ima gustinu raspodele

$$\varphi_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 9e^{-3y}, & 0 < x < y \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Nači funkciju raspodele i funkciju gustine slučajne promenljive $T = \frac{Y}{2X}$.

Rešenje: Tražimo zajedničku funkciju gustine dvodimenzionalne slučajne promenljive (T, Z), gde $T = \frac{Y}{2X}$, $Z = X$. Determinanta Jakobijan matrice te transformacije je

$$|J| = -2z,$$

pa važi

$$\varphi_{(T,Z)}(t,z) = \begin{cases} 18ze^{-6tz}, & 0 < z < 2zt \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

To znači da oblast $A = \{(x,y): \ x > 0, y > x\}$ slikamo u oblast $A' = \{(t,z): \ z > 0, t > \frac{1}{2}\}$. Za $t \le \frac{1}{2}$ važi $\varphi_T(t) = 0$, a za $t > \frac{1}{2}$ imamo

$$\varphi_T(t) = \int_0^\infty 18ze^{-6tz}dz = \underbrace{-z\frac{3}{t}e^{-6tz}\Big|_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty \frac{3}{t}e^{-6tz}dz = -\frac{1}{2t^2}e^{-6tz}\Big|_{z=0}^\infty = \frac{1}{2t^2}.$$

Koristili smo da za $\lambda > 0$ važi

$$\int e^{-\lambda wz}dz = -\frac{1}{\lambda w}e^{-\lambda wz},$$

i da eksponencijalna funkcija nadjača stepenu. Dakle

$$\varphi_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{2t^2}, & t > \frac{1}{2} \\ 0, & t \le \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dalje, za $t \le \frac{1}{2}$ važi $F_T(t) = 0$, dok za $t > \frac{1}{2}$ imamo

$$F_T(t) = P\{T < t\} = \int_{\frac{1}{2}}^t \frac{1}{2w^2}dw = -\frac{1}{2w}\Big|_{\frac{1}{2}}^t = 1 - \frac{1}{2t}.$$

3. Dva studenta M3 smera smera su se dogovorila da zajedno idu na konsultacije. Oni dolaze na dogovoreno mesto susreta, nezavisno jedan od drugog između 12 i 13 časova. Ko prvi stigne čeka drugog. Naći matematičko očekivanje i standardno odstupanje vremena čekanja.

Rešenje: X - dolazak jednog studenta, Y - dolazak drugog studenta, $X, Y : \mathcal{U}(12, 13)$. $Z = |X - Y|$ - vreme čekanja. Zbog nezavisnosti:

$$\begin{aligned} E(Z) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |x-y|\varphi_X(x)\varphi_Y(y)dxdy = \int_{12}^{13}\int_{12}^{13} |x-y|\cdot 1dxdy \\ &= \int_{12}^{13}\int_{y}^{13} (x-y)dxdy + \int_{12}^{13}\int_{12}^{y} (y-x)dxdy = ... = \frac{1}{3} \quad (20 \text{ min}) \\ E(Z^2) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-y)^2\varphi_X(x)\varphi_Y(y)dxdy = \int_{12}^{13}\int_{12}^{13} (x-y)^2\cdot 1dxdy = \frac{1}{6} \\ D(Z) &= E(Z^2) - E(Z)^2 = \frac{1}{18}, \quad \sqrt{D(Z)} = \frac{1}{\sqrt{18}} = 0.2357\ h \approx 14 \text{ min} \end{aligned}$$

4. Neka su $X_1, X_2, ...$ nezavisne slučajne promenljive sa zakonom raspodele:

$$X_n : \begin{pmatrix} -2n & 0 & 2n \\ \frac{2}{(n+2)^3} & 1 - \frac{6}{(n+2)^3} & \frac{4}{(n+2)^3} \end{pmatrix}, \ n = 1, 2, ...$$

Ispitati sve četiri vrste konvergencije niza $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Rešenje: $E(X_n) = \frac{2n}{(n+2)^3} \to 0$, kada $n \to \infty$, pa ispitujemo konvergenciju ka nuli. Skoro sigurna konvergencija:

$$P\{|X_n| \geq \varepsilon\} = \begin{cases} 0, & 2n < \varepsilon, \\ \frac{2+4}{(n+2)^3}, & 2n \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno i $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da $n_0 \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Tada

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n| \geq \varepsilon\} = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{6}{(n+2)^3} < \infty$$

jer $\frac{6}{(n+2)^3} \backsim \frac{6}{n^3}$, a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konvergira. Dakle, iz BK1 sledi da se sa verovatnoćom 1 realizuje najviše konačno mnogo događaja $\{|X_n| \geq \varepsilon\}$, pa sledi da X_n konvergira ka 0 skoro sigurno, kada $n \to \infty$.

Ovo implicira konvergenciju u verovatnoći i u raspodeli niza (X_n) ka $X = 0$.

Srednje kvadratna konvergencija:

$$E(X_n^2) = \frac{4n^2 \cdot 6}{(n+2)^3} \to 0, \; n \to \infty$$

pa X_n teži ka nuli i srednje kvadratno.

5. Pretpostavimo da se pri merenju visine čoveka pravi greška između $(-0.45, 0.45)$ cm. Neka su još greške pri različitim merenjima nezavisne i uniformno raspodeljene na intervalu $(-0.45, 0.45)$.

(a) Ako se meri 10 000 ljudi, naći verovatnoću da apsolutna vrednost ukupne greške premaši broj 15.

(b) Koliko se najviše ljudi može meriti, pa da sa verovatnoćom 0.9 apsolutna vrednost ukupne greške bude manja od 15?

Rešenje: $X_k : \mathcal{U}(-0.45, 0.45), \; E(X_k) = 0, \; D(X_k) = \frac{0.9^2}{12} = 0.0675.$
Ukupna greška pri merenju n ljudi je $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Imamo $E(S_n) = 0$ i $D(S_n) = nD(X_k)$, što sledi iz nezavisnosti. U nastavku ćemo koristiti Centralnu graničnu teoremu.

(a)

$$\begin{aligned} P\Big\{|\sum_{k=1}^{10000} X_k| > 15\Big\} &= P\Big\{\frac{\sum_{k=1}^{10000} X_k - 10000 \cdot 0}{\sqrt{10000 \cdot 0.0675}} \in \Big(-\infty, -\frac{15}{15\sqrt{3}}\Big) \cup \Big(\frac{15}{15\sqrt{3}}, \infty\Big)\Big\} \\ &= 2P\Big\{X^* > \frac{1}{\sqrt{3}}\Big\} = 2\Big(0.5 - \Phi\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)\Big) = 1 - 2 \cdot 0.219 \\ &= 0.562. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P\Big\{|\sum_{k=1}^{n} X_k| < 15\Big\} = 0.9 &\Leftrightarrow P\Big\{-\frac{15}{\sqrt{0.0675n}} < X^* < \frac{15}{\sqrt{0.0675n}}\Big\} = 0.9 \\ &\Leftrightarrow 2\Phi\Big(\frac{15}{\sqrt{0.0675n}}\Big) = 0.9 \Leftrightarrow \frac{15}{\sqrt{0.0675n}} = 1.65 \\ &\Leftrightarrow n = 1224.36 \approx 1224. \end{aligned}$$