Verovatnoća - kolokvijum
17. decembar 2016.

1. Profesor daje dva tipa ispita, ,,težak" ispit i ,,lak" ispit. Verovatnoća da student dobije težak ispit je 0.8. Ako je ispit težak, verovatnoća da se prvo pitanje na ispitu okarakteriše kao teško je 0.9. U suprotnom, ta verovatnoća je 0.15. Koja je verovatnoća da prvo pitanje na ispitu bude teško? Koja je verovatnoća da je ispit težak, ako je prvo pitanje teško?

2. Pera i Sima izvlače slučajno broj iz skupa $\{1, 2, \dots, 10\}$ u isto vreme i nezavisno jedan od drugog. Postupak se ponavlja dok Pera ne izvuče jedan od brojeva iz skupa $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ili dok Sima ne izvuče jedan od brojeva iz skupa $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Pobednik je onaj ko prvi izvuče jedan od brojeva iz navedenih skupova. Ako Pera izvuče broj iz skupa A i Sima broj iz skupa B, smatra se da je Pera pobednik. Neka je X_1 broj Perinih izvlačenja dok ne dobije broj iz skupa A i X_1 broj Siminih izvlačenja dok ne dobije broj iz skupa B.

   (a) Naći raspodele slučajnih promenljivih X_1 i X_2.

   (b) Naći verovatnoću da Pera pobedi.

Verovatnoća - kolokvijum
17. decembar 2016.

1. Profesor daje dva tipa ispita, ,,težak" ispit i ,,lak" ispit. Verovatnoća da student dobije težak ispit je 0.8. Ako je ispit težak, verovatnoća da se prvo pitanje na ispitu okarakteriše kao teško je 0.9. U suprotnom, ta verovatnoća je 0.15. Koja je verovatnoća da prvo pitanje na ispitu bude teško? Koja je verovatnoća da je ispit težak, ako je prvo pitanje teško?

2. Pera i Sima izvlače slučajno broj iz skupa $\{1, 2, \dots, 10\}$ u isto vreme i nezavisno jedan od drugog. Postupak se ponavlja dok Pera ne izvuče jedan od brojeva iz skupa $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ili dok Sima ne izvuče jedan od brojeva iz skupa $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Pobednik je onaj ko prvi izvuče jedan od brojeva iz navedenih skupova. Ako Pera izvuče broj iz skupa A i Sima broj iz skupa B, smatra se da je Pera pobednik. Neka je X_1 broj Perinih izvlačenja dok ne dobije broj iz skupa A i X_1 broj Siminih izvlačenja dok ne dobije broj iz skupa B.

   (a) Naći raspodele slučajnih promenljivih X_1 i X_2.

   (b) Naći verovatnoću da Pera pobedi.

Verovatnoća - kolokvijum
17. decembar 2016.

1. Profesor daje dva tipa ispita, ,,težak" ispit i ,,lak" ispit. Verovatnoća da student dobije težak ispit je 0.8. Ako je ispit težak, verovatnoća da se prvo pitanje na ispitu okarakteriše kao teško je 0.9. U suprotnom, ta verovatnoća je 0.15. Koja je verovatnoća da prvo pitanje na ispitu bude teško? Koja je verovatnoća da je ispit težak, ako je prvo pitanje teško?

2. Pera i Sima izvlače slučajno broj iz skupa $\{1, 2, \dots, 10\}$ u isto vreme i nezavisno jedan od drugog. Postupak se ponavlja dok Pera ne izvuče jedan od brojeva iz skupa $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ili dok Sima ne izvuče jedan od brojeva iz skupa $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Pobednik je onaj ko prvi izvuče jedan od brojeva iz navedenih skupova. Ako Pera izvuče broj iz skupa A i Sima broj iz skupa B, smatra se da je Pera pobednik. Neka je X_1 broj Perinih izvlačenja dok ne dobije broj iz skupa A i X_1 broj Siminih izvlačenja dok ne dobije broj iz skupa B.

   (a) Naći raspodele slučajnih promenljivih X_1 i X_2.

   (b) Naći verovatnoću da Pera pobedi.

Verovatnoća - pismeni ispit, M3, M4

1\. februar 2017.

1. Na slučajan način se bira broj iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Zatim se baca kockica dok se ne dobije broj koji je veći ili jednak od izvučenog broja. Neka slučajna promenljiva X predstavlja broj bacanja kockice. Odrediti raspodelu za X, $E(X)$ i $D(X)$.

2. Slučajna promenljiva X ima funkciju gustine datu sa $\varphi_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$. Naći funkciju raspodele i funkciju gustine slučajne promenljive $Y = \frac{2X}{1-X^2}$.

3. Odrediti $c \in \mathbb{R}$ tako da funkcija
$$f(x, y) = \frac{c}{\pi^2(1 + x^2)(1 + y^2)}, x, y \in \mathbb{R}$$
bude funkcija gustine neke slučajne promenljive $Z = (X, Y)$. Odrediti marginalne gustine i verovatnoću da Z uzme vrednosti u kvadratu $K = [0, 1] \times [0, 1]$.

4. Pretpostavimo da $X_n \to a$ u verovatnoći i da $Y_n \to b$ u verovatnoći, gde su a, b konstante. Dokazati da $X_n + Y_n \to a + b$ u verovatnoći.

5. Pomoću računara vrši se obračun električne energije za 100 korisnika. Vreme obračuna za svakog korisnika ima eksponenicjalnu raspodelu sa očekivanjem 3 sekunde i ne zavisi od drugih korisnika. Odrediti verovatnoću da će obračun trajati između 3 i 6 minuta.

Verovatnoća - pismeni ispit, M3, M4

1\. februar 2017.

1. Na slučajan način se bira broj iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Zatim se baca kockica dok se ne dobije broj koji je veći ili jednak od izvučenog broja. Neka slučajna promenljiva X predstavlja broj bacanja kockice. Odrediti raspodelu za X, $E(X)$ i $D(X)$.

2. Slučajna promenljiva X ima funkciju gustine datu sa $\varphi_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$. Naći funkciju raspodele i funkciju gustine slučajne promenljive $Y = \frac{2X}{1-X^2}$.

3. Odrediti $c \in \mathbb{R}$ tako da funkcija
$$f(x, y) = \frac{c}{\pi^2(1 + x^2)(1 + y^2)}, x, y \in \mathbb{R}$$
bude funkcija gustine neke slučajne promenljive $Z = (X, Y)$. Odrediti marginalne gustine i verovatnoću da Z uzme vrednosti u kvadratu $K = [0, 1] \times [0, 1]$.

4. Pretpostavimo da $X_n \to a$ u verovatnoći i da $Y_n \to b$ u verovatnoći, gde su a, b konstante. Dokazati da $X_n + Y_n \to a + b$ u verovatnoći.

5. Pomoću računara vrši se obračun električne energije za 100 korisnika. Vreme obračuna za svakog korisnika ima eksponenicjalnu raspodelu sa očekivanjem 3 sekunde i ne zavisi od drugih korisnika. Odrediti verovatnoću da će obračun trajati između 3 i 6 minuta.

VEROVATNOĆA, PISMENI, 1.2.2017. (SVI SMEROVI)

Verovatnoća - pismeni ispit, M3, M4

1. februar 2017.

1. Na slučajan način se bira broj iz skupa $\{1,2,3,4,5,6\}$. Zatim se baca kockica dok se ne dobije broj koji je veći ili jednak od izvučenog broja. Neka slučajna promenljiva X predstavlja broj bacanja kockice. Odrediti raspodelu za X, $E(X)$ i $D(X)$.
2. Slučajna promenljiva X ima funkciju gustine datu sa $\varphi_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$. Naći funkciju raspodele i funkciju gustine slučajne promenljive $Y = \frac{2X}{1-X^2}$.
3. Odrediti $c \in \mathbb{R}$ tako da funkcija
$$f(x,y) = \frac{c}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}, x,y \in \mathbb{R}$$
bude funkcija gustine neke slučajne promenljive $Z = (X,Y)$. Odrediti marginalne gustine i verovatnoću da Z uzme vrednosti u kvadratu $K = [0,1] \times [0,1]$.
4. Pretpostavimo da $X_n \to a$ u verovatnoći i da $Y_n \to b$ u verovatnoći, gde su a, b konstante. Dokazati da $X_n + Y_n \to a + b$ u verovatnoći.
5. Pomoću računara vrši se obračun električne energije za 100 korisnika. Vreme obračuna za svakog korisnika ima eksponenicjalnu raspodelu sa očekivanjem 3 sekunde i ne zavisi od drugih korisnika. Odrediti verovatnoću da će obračun trajati između 3 i 6 minuta.

$\boxed{1.}$ X – broj bacanja kockice dok se ne dobije broj koji je veći ili jednak slučajno izabranom broju iz skupa $\{1, 2, \dots, 6\}$

Ako je j slučajno izabrani broj, onda broj bacanja kockice dok se ne dobije broj $\geq j$ ima geometrijsku raspodelu sa parametrom p_j, odnosno

$$p_j = \frac{6-j+1}{6}$$

$6-j+1 \to$ broj ishoda koji su $\geq j$

$6 \to$ broj mogućih ishoda, tj. brojeva koji se pojave kada bacamo kockicu

$\to$ brojevi veći ili jednaki sa j su $j, j+1, \dots, 6$ i ima ih $6-(j-1) = 6-j+1$

Dalje, neka je H_j – izabran je broj j, $j \in \{1, 2, \dots, 6\}$

Jasno, $p(H_j) = \frac{1}{6}$

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots \\ ? & ? & ? & & ? & \end{pmatrix}$$

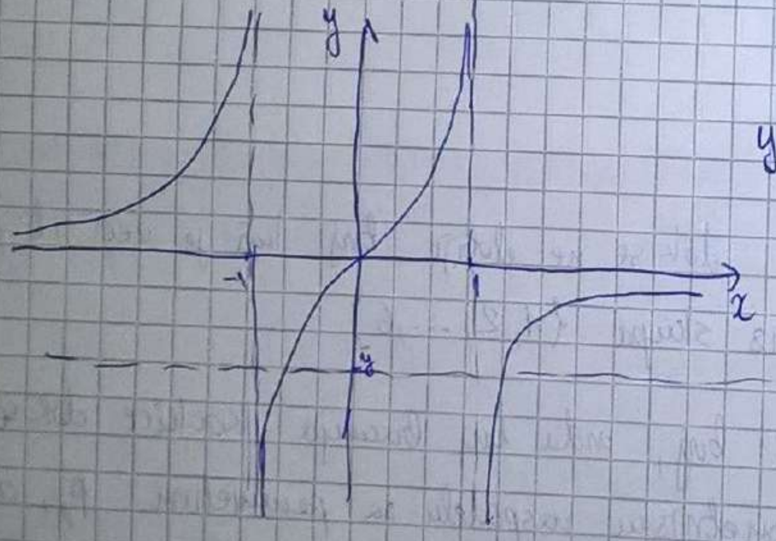
Tada je $P\{X = k\} = \sum_{j=1}^{6} \left(1 - \frac{6-j+1}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{6-j+1}{6} \cdot \frac{1}{6}$, $k = 1, 2, \dots$

$$E(X) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \sum_{j=1}^{6} \left(1 - \frac{6-j+1}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{6-j+1}{6}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \sum_{j=1}^{6} \left(1 - \frac{6-j+1}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{6-j+1}{6}$$

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$\boxed{2.}$ X, $\varphi_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$, $Y = \frac{2X}{1-X^2}$



$$y = \frac{2x}{1-x^2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+y^2}}{y} = -\frac{1}{y} \pm \sqrt{1 + \frac{1}{y^2}}$$

1) $y < 0$

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\left\{-1 < X < -\frac{1}{y} - \sqrt{1 + \frac{1}{y^2}}\right\} +$$

$$+ P\left\{1 < X < -\frac{1}{y} + \sqrt{1 + \frac{1}{y^2}}\right\} =$$

$$= \int_{-1}^{-\frac{1}{y} - \sqrt{1+\frac{1}{y^2}}} \frac{1}{\pi} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{1}^{-\frac{1}{y} + \sqrt{1+\frac{1}{y^2}}} \frac{1}{\pi} \frac{dx}{1+x^2} = \dots = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{y}\right)$$

2) $y=0$

$$F_Y(y)=P\{Y<0\}=P\{-1<X<0\}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}dx=$$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{1}{\pi}\frac{dx}{1+x^2}+\int_1^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}$$

3) $y>0$

$$F_Y(y)=P\{Y<y\}=\int_{-\infty}^{-\frac{1}{y}-\sqrt{1+y^2}}\frac{dx}{\pi(1+x^2)}+\int_{-1}^{-\frac{1}{y}+\sqrt{1+\frac{1}{y}}}\frac{dx}{\pi(1+x^2)}+\int_1^{\infty}\frac{dx}{\pi(1+x^2)}$$

3. $$f(x,y)=\frac{c}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)},\quad x,y\in\mathbb{R}$$

1) $f\geq 0 \iff c\geq 0$

2) $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}\,dx\,dy=1 \rightarrow c=1$$

$$\varphi_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy=\frac{1}{\pi(1+x^2)},\quad \varphi_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dx=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

$$P\{Z\in S\}=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1\int_0^1\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}\,dx\,dy=\frac{1}{16}$$

5. X_i – vreme obrade i-tog korisnika

$$S_{100}=\sum_{i=1}^{100}X_i \rightarrow \text{vreme obrade 100 korisnika}$$

$$E(S_{100})=\sum_{i=1}^{100}E(X_i)=\sum_{i=1}^{100}3=300$$

dato je u zadatku da je $E(X_i)=3$

- X_i ima $\mathcal{E}(\frac{1}{3})$ raspodelu! $\to E(X_i) = 3,\ D(X_i) = 9$

$$\Rightarrow D(S_{100}) = \sum_{i=1}^{100} D(X_i) = 900$$

$$S_{100}^* = \frac{S_{100} - E(S_{100})}{\sqrt{D(S_{100})}} = \frac{S_{100} - 300}{30}$$

centralna granična teorema

Dakle, $P\{\underset{3\min = 180s}{180} < S_{100} < 360\} = P\{\frac{180-300}{30} < S_{100}^* < \frac{360-300}{30}\} =$

$$= P\{-4 < S_{100}^* < 2\} = \Phi(2) - \Phi(-4) \approx 0{,}977$$

$\boxed{4.}$ $P\{|(X_n+Y_n) - (a+b)| \geq \varepsilon\} = P\{|(X_n-a) + (Y_n-b)| \geq \varepsilon\} \leq$

$\leq P\{|X_n-a| + |Y_n-b| \geq \varepsilon\} \leq P\{(|X_n-a| \geq \frac{\varepsilon}{2}) \cup (|Y_n-b| \geq \frac{\varepsilon}{2})\}$

$\leq P\{|X_n-a| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} + P\{|Y_n-b| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Verovatnoća - pismeni ispit, M3, M4

7. april 2017.

1. U jednoj grupi studenata ima a odličnih, b prosečnih i c slabih. Odličan student na ispitu može dobiti samo odličnu ocenu, prosečan sa jednakim verovatnoćama dobija odličnu ili dobru ocenu, a slab student sa jednakim verovatnoćama dobija dobru, zadovoljavajuću ili slabu ocenu.
   (a) Na ispitu se na slučajan način proziva jedan student iz grupe. Naći verovatnoću da dobije dobru ili odličnu ocenu.
   (b) Na ispitu se na slučajan način prozivaju dva studenta. Naći verovatnoću da jedan dobije dobru, a drugi zadovoljavajuću ocenu.

2. Slučajna promenljiva X ima gustinu $\varphi_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Odrediti raspodelu slučajne promenljive Y date sa
$$Y = \begin{cases} -X-3, & X \leq -1 \\ -1-X^2, & X \in (-1,2] \\ X-7, & X > 2. \end{cases}$$
Naći $P\{Y < 0\}$.

3. Vektor (X, Y) ima gustinu
$$\varphi(x,y) = \begin{cases} a(x+y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D, \end{cases}$$
gde je $D = \{(x,y) : 0 < x < 1,\ x^2 < y < \sqrt{x}\}$. Odrediti a i naći $P\{Y > 1/2 \mid X \leq 1/2\}$.

4. Karakteristične funkcije nezavisnih slučajnih promenljivih X i Y su date sa $f_X(t) = e^{2e^{it}-2}$ i $f_Y(t) = \frac{1}{4^{10}}(3e^{it}+1)^{10}$. Odrediti raspodele za X i Y i verovatnoće $P\{X+Y=2\}$, $P\{XY=0\}$ i $E(X)$.

   Rešenje. Važi da je $f_X(t) = e^{-2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k e^{itk}}{k!}$, pa je $P\{X=k\} = e^{-2}\frac{2^k}{k!}$.

   Dalje je $f_Y(t) = \displaystyle\frac{1}{4^{10}}\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}3^k e^{itk}$, pa je $P\{Y=k\} = \frac{1}{4^{10}}\binom{10}{k}3^k$.

   Dakle, $P\{X+Y=2\} = P\{X=2, Y=0\} + P\{X=0, Y=2\} + P\{X=1, Y=1\} = ...$

5. Aparat za igru može da izbaci broj $k \in \mathbb{N}_0$ sa verovatnoćom $p_k = \frac{1}{ek!}$. Ako izbaci paran broj igrač gubi jedan poen, a ako izbaci neparan broj igrač dobija jedan poen. Odrediti verovatnoću da će nakon izbacivanja 1000 brojeva igrač imati između 100 i 200 poena.

   Rešenje. Neka slučajna promenljiva X_j predstavlja broj poena osvojenih u j-toj igri, gde je $1 \leq j \leq 1000$. Dakle, ukupan broj poena osvojenih u 1000 igara je dat sa $X_{1000} = \sum_{j=1}^{1000} X_j$. Prvo treba odrediti raspodelu za X_j. Iz uslova u zadatku jasno je da X_j uzima vrednosti -1 ili 1. Vrednost -1 se dobija kada aparat izbaci paran broj (igrač gubi poen), pa je
$$P\{X_j = -1\} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-1}}{(2n)!} = \frac{1+e^{-2}}{2}.$$
   Primetimo da se suma reda lako dobija ako se saberu razvoji u red za e^1 i e^{-1}. Dalje je $P\{X_j = -1\} = 1 - P\{X_j = 1\}$

   Treba odrediti $100 < P\{X_{1000}\} < 200$. Kako su promenljive X_j nezavisne i imaju istu raspodelu, možemo da primenimo centralnu graničnu teoremu. Važi da je $E(X_{1000}) = 1000E(X_j) = -1000 * e^{-2}$ i $D(X_j) = 1 - e^{-4}$, pa je $D(X) = 1000(1-e^{-4})$. Dakle,
$$P\Big\{\frac{100 - E(X_{1000})}{\sqrt{D(X_{1000})}} < X^*_{1000} < \frac{200 - E(X_{1000})}{\sqrt{D(X_{1000})}}\Big\} = \Phi... - \Phi.... = 0.$$

(1) (a) Uvodimo hipoteze:

H_1 - izabran je odličan student, H_2 - izabran je prosečan student, H_3 - izabran je slab student.

Neka je A - izabrani student dobija dobru ili odličnu ocenu. Tražimo $P(A)$.

Važi: $P(H_1) = \frac{a}{a+b+c}$, $P(H_2) = \frac{b}{a+b+c}$, $P(H_3) = \frac{c}{a+b+c}$.

$$P(A|H_1) = 1, \quad P(A|H_2) = 1, \quad P(A|H_3) = \frac{1}{3}$$

$$P(A) = \frac{a}{a+b+c}\cdot 1 + \frac{b}{a+b+c}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{c}{a+b+c} = \frac{3a+3b+c}{3(a+b+c)}.$$

(b) H_1 - izabrana dva slaba studenta

H_2 - izabrani jedan prosečan i jedan slab student

H_3 - izabrana ili dva odlična ili odličan i prosečan ili dva prosečna ili odličan i slab student

A - jedan student dobija dobru, a drugi nedovoljavajuću ocenu

$$P(H_1) = \frac{\binom{c}{2}}{\binom{a+b+c}{2}}, \quad P(H_2) = \frac{\binom{b}{1}\binom{c}{1}}{\binom{a+b+c}{2}}, \quad P(H_3) = 1 - P(H_1) - P(H_2)$$

$$P(A|H_1) = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{9}, \quad P(A|H_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \quad P(A|H_3) = 0$$

$$\Rightarrow P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \underbrace{P(H_3)\cdot P(A|H_3)}_{=0} =$$

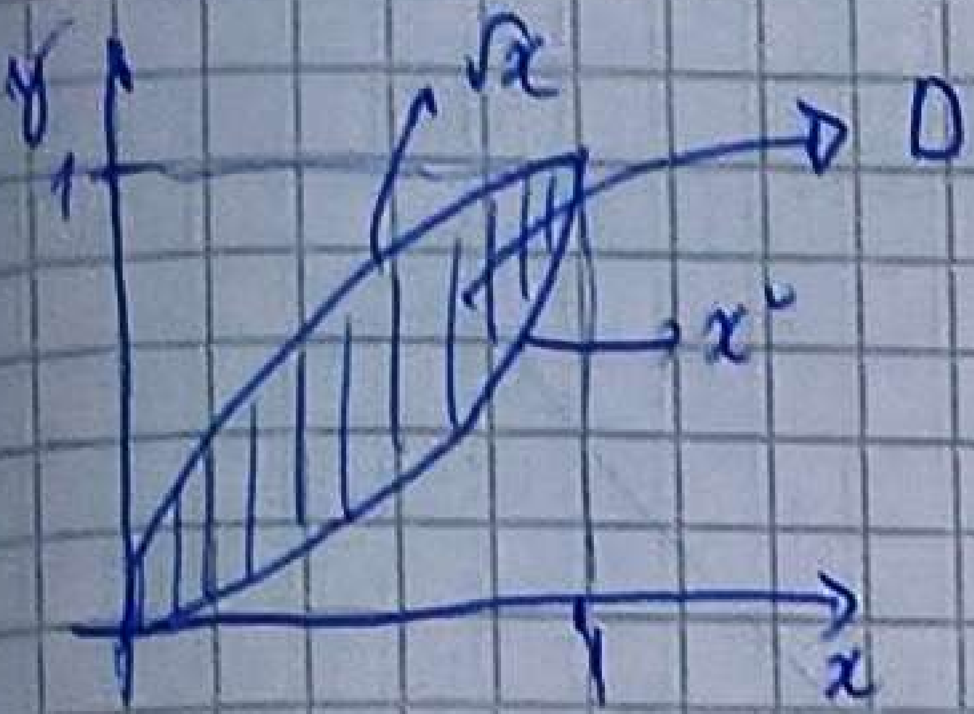
$$= \frac{2c(c-1) + 3bc}{9(a+b+c)(a+b+c-1)}$$

(3)

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} a(x+y), & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D \end{cases}$$

$D = \{(x,y):\ 0<x<1,\ x^2<y<\sqrt{x}\}$

Treba odrediti a i naći $P\{Y > \frac{1}{2} \mid X \le \frac{1}{2}\}$.



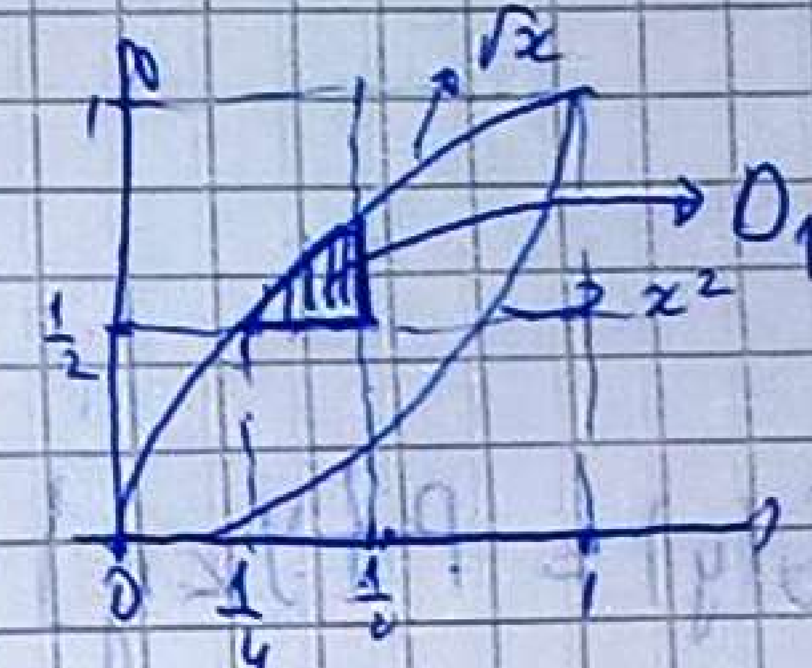
$a \geq 0$; $\iint\limits_D a(x+y)\,dx\,dy = 1$

$$\iint\limits_D a(x+y)\,dx\,dy = a\int_0^1\Big(\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(x+y)\,dy\Big)dx = 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow \varphi(x,y) = \begin{cases} \frac{10}{3}(x+y), & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\notin D \end{cases}$$

$$P\{Y > \tfrac{1}{2} \mid X \leq \tfrac{1}{2}\} = \frac{P\{X\leq \frac{1}{2},\, Y > \frac{1}{2}\}}{P\{X \leq \frac{1}{2}\}}$$



$$P\{X \leq 1/2,\, Y > \tfrac{1}{2}\} = \iint\limits_{D_1} \varphi(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{x}} \varphi(x,y)\,dy\Big)dx = \frac{10}{3}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{x}}(x+y)\,dx\,dy$$

$$\cdot\ P\{X \leq \tfrac{1}{2}\} = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} \varphi_X(x)\,dx$$

$$\varphi_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,y)\,dy = \int_{x^2}^{\sqrt{x}}\frac{10}{3}(x+y)\,dy \text{ , za } x\in(0,1)$$

$$\Rightarrow\ P\{X \leq \tfrac{1}{2}\} = \int_0^{\frac{1}{2}}\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\frac{10}{3}(x+y)\,dy$$

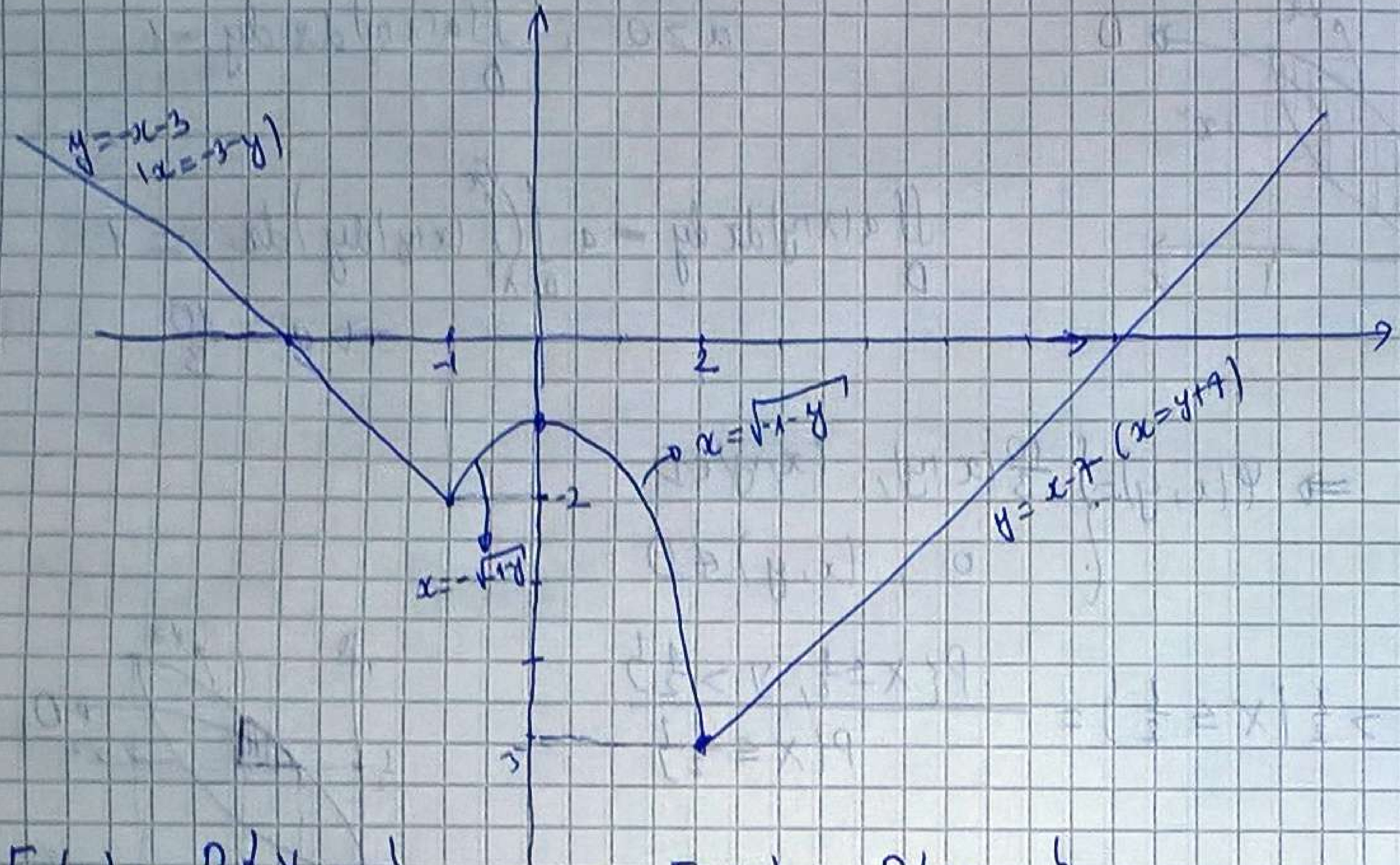
2. $\varphi_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $x\in\mathbb{R}$

$$Y = \begin{cases} -X-3, & x \leq -1 \\ -1-X^2, & x\in(-1,2] \\ X-7, & x>2 \end{cases}$$

$y = -1-x^2$ za $x \in (-1,2]$

$x^2 = -1-y \geq 0$

$x = \pm\sqrt{-1-y}$



$F_Y(y) = P\{Y < y\}$ $\Rightarrow$ $F_Y(0) = P\{Y<0\}$

1) $y \le -5 \Rightarrow F_Y(y) = P\{Y<y\} = 0$

2) $y \in (-5, -2]$

$F_Y(y) = P\{Y<y\} = P\{\sqrt{-(1+y)} < X < y+7\} = \int\limits_{\sqrt{-(1+y)}}^{y+7} \varphi_X(x)\,dx = \int\limits_{\sqrt{-(1+y)}}^{y+7} \frac{1}{2} e^{-|x|}\,dx =$

$= \int\limits_{-\sqrt{-(1+y)}}^{y+7} \frac{1}{2} e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}\left(e^{-\sqrt{-y-1}} - e^{-y-7}\right)$

3) $y \in (-2, -1]$

$F_Y(y) = P\{Y<y\} = P\{-3-y < X < -\sqrt{-1-y}\} + P\{\sqrt{-1-y} < X < y+7\} =$

$= \int\limits_{-3-y}^{-\sqrt{-1-y}} \frac{1}{2} e^{x}\,dx + \int\limits_{\sqrt{-1-y}}^{y+7} \frac{1}{2} e^{-x}\,dx$

4) $y > -1$

$F_Y(y) = P\{-3-y < X < y+7\} = \int\limits_{-3-y}^{\overset{>0}{y+7}} \frac{1}{2} e^{-|x|}\,dx = \int\limits_{-3-y}^{0} \frac{1}{2} e^{x}\,dx + \int\limits_{0}^{y+7} \frac{1}{2} e^{-x}\,dx$

Verovatnoća - pismeni ispit, smerovi M0, M1, M2, M3, M4

16. jun 2017.

1. U jednoj srednjoj školi 35% učenika uči Nemački kao drugi strani jezik, 15% uči Francuski, a 40% uči bar jedan od ova dva jezika. Odrediti verovatnoću da slučajno odabrani student uči Francuski, ako se zna da uči Nemački.

2. Neka su X i Y nezavisne slučajne promenljive sa $\mathcal{E}(\mu)$ raspodelom, $\mu > 0$, i neka je

$$V = X + Y, \quad W = \frac{X}{X+Y}$$

Naći funkciju gustine slučajne promenljive (V,W). Dokazati da su slučajne promenljive V i W nezavisne.

3. Neka je $N : \mathcal{N}(0,1)$. Neka slučajna promenljiva S predstavlja zbir korena jednačine $x^2 + 2Nx + 1 = 0$. Odrediti funkciju raspodele i funkciju gustine slučajne promenljive S, ako su koreni jednačine realni.

4. Dat je niz nezavisnih slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \ldots$ i $X_n : U(0,n), n = 1,2,\ldots$. Ispitati sve četiri vrste konvergencije niza $Y_n = \frac{X_n}{1-X_n}$, $n = 1,2,\ldots$.

5. Bazen se prazni svakog sata. Vreme pražnjenja u minutima ima eksponencijalnu $\mathcal{E}(\frac{1}{20})$ raspodelu. Kroz cevi za pražnjenje istekne jedan kubni metar vode u minutu. Ako je u bazenu bilo 1000 m^3 kolika je verovatnoća da je nakon 12 sati u bazenu ostalo manje od 420 m^3 vode ?

Verovatnoća - pismeni ispit, smerovi M0, M1, M2, M3, M4

16. jun 2017.

1. U jednoj srednjoj školi 35% učenika uči Nemački kao drugi strani jezik, 15% uči Francuski, a 40% uči bar jedan od ova dva jezika. Odrediti verovatnoću da slučajno odabrani student uči Francuski, ako se zna da uči Nemački.

2. Neka su X i Y nezavisne slučajne promenljive sa $\mathcal{E}(\mu)$, $\mu > 0$, raspodelom i neka je

$$V = X + Y, \quad W = \frac{X}{X+Y}$$

Naći funkciju gustine slučajne promenljive (V,W). Dokazati da su slučajne promenljive V i W nezavisne.

3. Neka je $N : \mathcal{N}(0,1)$. Neka slučajna promenljiva S predstavlja zbir korena jednačine $x^2 + 2Nx + 1 = 0$. Odrediti funkciju raspodele i funkciju gustine slučajne promenljive S, ako su koreni jednačine realni.

4. Dat je niz nezavisnih slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \ldots$ i $X_n : U(0,n), n = 1,2,\ldots$. Ispitati sve četiri vrste konvergencije niza $Y_n = \frac{X_n}{1-X_n}$, $n = 1,2,\ldots$.

5. Bazen se prazni svakog sata. Vreme pražnjenja u minutima ima eksponencijalnu $\mathcal{E}(\frac{1}{20})$ raspodelu. Kroz cevi za pražnjenje istekne jedan kubni metar vode u minutu. Ako je u bazenu bilo 1000 m^3 kolika je verovatnoća da je nakon 12 sati u bazenu ostalo manje od 420 m^3 vode ?

VEROVATNOĆA, 16.6.2017.

1. A - slučajno izabrani student uči Francuski

   B - slučajno — II — uči Nemački

$\underline{P(A|B) = ?}$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$P(A) = 0.15$, $P(B) = 0.35$

$P(A \cup B) = 0.4$

$P(AB) = ?$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$P(AB) = -0.4 + 0.15 + 0.35 = 0.10$$

$$P(A|B) = \frac{0.10}{0.35} = \frac{2}{7}$$

(2.) X, Y nezavisne, $\mathcal{E}(\mu)$ raspodela

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \mu e^{-\mu x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$V = X + Y, \quad W = \frac{X}{X+Y}$$

$$\varphi_Y(y) = \begin{cases} \mu e^{-\mu y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

$\varphi_{(V,W)}(v,w) = ?$

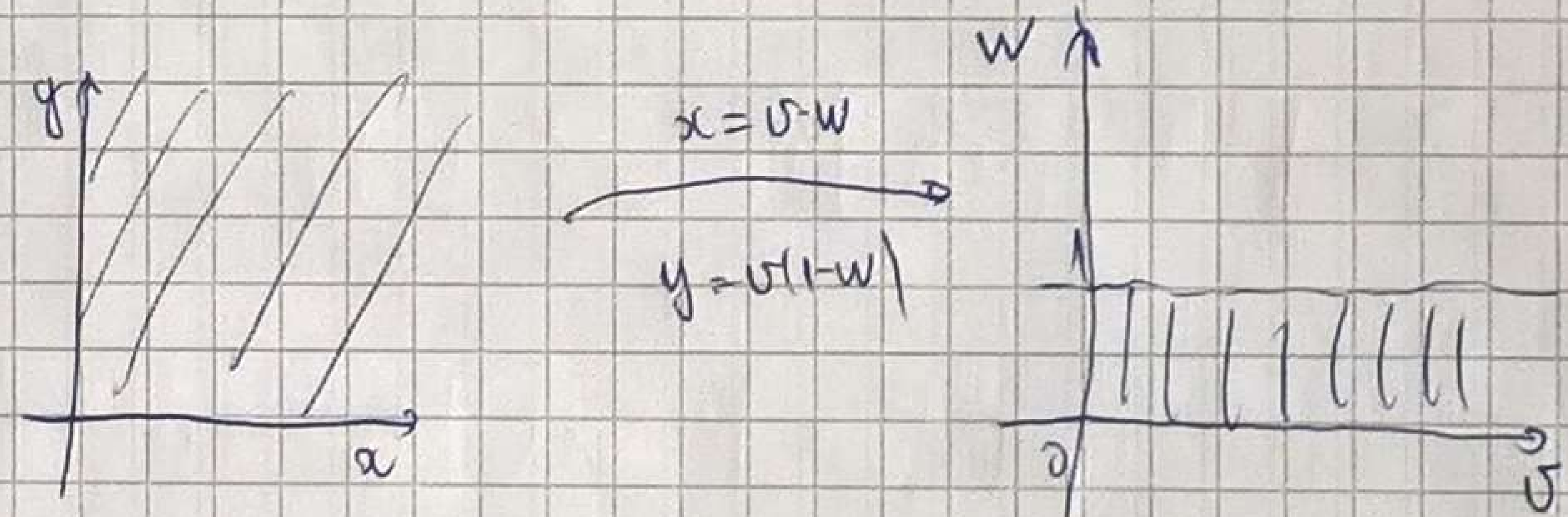
$$v = x + y$$

$$w = \frac{x}{x+y} \Rightarrow x = v \cdot w$$

$$y = v - vw = v(1-w)$$

$$J(v,w) = \begin{vmatrix} w & v \\ 1-w & -v \end{vmatrix} = -v$$

Dakle, $\varphi_{(V,W)}(v,w) = \mu e^{-\mu v w} \cdot \mu e^{-\mu v(1-w)} \cdot |-v| = \mu^2 v e^{-\mu v}, \; v > 0, 0 < w < 1$



$\varphi_{(V,W)}(v,w) = 0$, inače

$$\varphi_V(v) = \int_0^1 \mu^2 v e^{-\mu v} \, dw = \mu^2 v e^{-\mu v}, \; v > 0$$

$\varphi_V(v) = 0$, inače

$$\varphi_W(w) = \int_0^\infty \mu^2 v e^{-\mu v} \, dv = 1 \quad \text{za} \quad 0 < w < 1$$

$\varphi_W(w) = 0$ inače

Dakle je $\varphi_{(V,W)}(v,w) = \varphi_V(v)\, \varphi_W(w) \Rightarrow V$ i W su nezavisne

(5.) $N : \mathcal{N}(0,1)$ $\qquad x^2 + 2Nx + 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-2N \pm \sqrt{4N^2 - 4}}{2} = \frac{-2N \pm 2\sqrt{N^2-1}}{2}$$

$x_1 + x_2 = -N + \sqrt{N^2-1} + (-N - \sqrt{N^2-1}) = -2N$

Dakle, $\underline{S = -2N}$

Koreni jednačine $x^2+2Nx+1=0$ su realni samo ako je $N^2-1 \geq 0$, to jest $\underline{|N| \geq 1}$

Dakle, prvo treba odrediti funkciju raspodele sluč. prom. $S=-2N$, ako je $|N|\geq 1$, odnosno

$$P(-2N < x \mid |N| \geq 1) = ? \quad (= F_{-2N \mid |N|\geq 1}(x))$$

$$P(-2N < x \mid |N| \geq 1) = \frac{P(-2N<x, |N| \geq 1)}{P(|N| \geq 1)}$$

$$P(|N| \geq 1) = P(N \leq -1) + P(N \geq 1)$$

$$P(N \leq -1) = \Phi(-1) - \Phi(-\infty) = -\Phi(1) - (-\tfrac{1}{2})$$

$$\underline{P(N \geq 1)} = -\Phi(1) + \Phi(\infty) = \tfrac{1}{2} - \Phi(1)$$

$$\Rightarrow P(|N| \geq 1) = -\Phi(1) + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \Phi(1) = 1 - 2\Phi(1)$$

Dalje, $P(-2N < x, |N| \geq 1) = P(N > -\frac{1}{2}x, |N| \geq 1) = P(|N| \geq 1)$ za $x \in [-2, 2)$

$$P(N > -\tfrac{1}{2}x, |N| \geq 1) = \begin{cases} P(N > -\frac{1}{2}x) = 1 - \Phi(-\frac{1}{2}x), & x \leq -2 \\ P(-\frac{1}{2}x \leq N \leq -1) = \Phi(-1) - \Phi(-\frac{1}{2}x), & x \geq 2 \end{cases}$$

Zatim je $\varphi_{-2N \mid |N| \geq 1}(x) = F'(x)$, tamo gde je F diferencijabilna

(4) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $X_n : \mathcal{U}(0,n)$, $n = 1, 2, \dots$ $\rightarrow$ $\varphi_{X_n}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in (0,n) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$

$$Y_n = \frac{X_n}{1 - X_n}$$

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{s.s.}} \arrow[r] & \boxed{\text{u ver.}} \arrow[r] & \boxed{\text{u raspodeli}} \\ & \boxed{\text{s.k.}} \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

$$E(Y_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1-x} \varphi_{X_n}(x)\,dx = \int_0^n \frac{x}{1-x} \frac{1}{n}\,dx = \frac{1}{n}\int_0^n \frac{x}{1-x}\,dx \rightarrow \text{integral divergira!}$$

Međutim, $Y_n = \frac{X_n}{1-X_n} = \dots = -1 - \frac{1}{X_n - 1}$, pa ćemo ispitivati konvergenciju ka -1

Da li $Y_n \rightarrow -1$ u verovatnoći?

$$P\{|Y_n + 1| \geq \varepsilon\} = P\left\{\left|\frac{X_n}{1-X_n} + 1\right| \geq \varepsilon\right\} = P\left\{\left|\frac{X_n + 1 - X_n}{1 - X_n}\right| \geq \varepsilon\right\}$$

$$= P\left\{\left|\frac{1}{1-X_n}\right| \geq \varepsilon\right\} = P\left\{|X_n - 1| \leq \frac{1}{\varepsilon}\right\} = P\left\{-\frac{1}{\varepsilon} \leq X_n - 1 \leq \frac{1}{\varepsilon}\right\} =$$

$$= P\left\{1 - \frac{1}{\varepsilon} \leq X_n \leq 1 + \frac{1}{\varepsilon}\right\} = F_{X_n}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) - F_{X_n}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right), \text{ gde je}$$

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x}{n}, & 0 < x \leq n \\ 1, & x > n \end{cases} \quad (\text{znamo da } X_n : \mathcal{U}(0,n))$$

1) $\varepsilon \leq 1 \rightarrow 1 - \frac{1}{\varepsilon} \leq 0 \rightarrow F_{X_n}(1 - \varepsilon) = 0$

Tada je za dovoljno veliko n:

$$P\{|Y_n + 1| \geq \varepsilon\} = F_{X_n}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{\varepsilon + 1}{n\varepsilon}$$

2) $\varepsilon > 1$

Tada je za dovoljno veliko n:

$$P\{|Y_n + 1| \geq \varepsilon\} = F_{X_n}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) - F_{X_n}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{\varepsilon + 1}{n\varepsilon} - \frac{\varepsilon - 1}{n\varepsilon} = \frac{2}{n\varepsilon}$$

Dakle, $P\{|Y_n+1|\geq\varepsilon\} = \begin{cases} \frac{1+\varepsilon}{n\varepsilon}, & \frac{1}{n-1}<\varepsilon\leq 1 \\ \frac{2}{n\varepsilon}, & \varepsilon>1 \end{cases} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, za sve $\varepsilon>0$

Sledi da $Y_n \xrightarrow{V} -1$, pa $Y_n \to -1$ i u raspodeli

Ako konvergira s.s., onda granica mora biti -1, pošto s.s. implicira konvergenciju u verovatnoći. Međutim, $\sum_{n=n_0}^{\infty} P\{|Y_n+1|\geq\varepsilon\} = \infty$, $\forall\varepsilon>0$

$\Rightarrow$ niz (Y_n) ne konvergira s.s.

Kako je $E(Y_n^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1-x)^2}\varphi_{X_n}(x)dx = \frac{1}{n}\int_0^n \frac{x^2}{(1-x)^2}dx \to$ divergira

$\Rightarrow$ nema smisla govoriti o konvergenciji u srednje kvadratnom

(5) $X: \mathcal{E}(\frac{1}{20})$, X-vreme menjanja baterije

$E(X)=20$, $D(X)=400$

X_i - količina vode koja isteknе u i-tom satu $i=1,2,\dots,12$

$X_1, X_2, \dots, X_{12}$ su nezavisne i

$E(X_i)=20$, $D(X_i)=400$

Količina vode koja istekne za 12 sati: $Y_{12}=\sum_{i=1}^{12}X_i$

Treba odrediti $P(Y_{12}\geq 580)$

$E(Y_{12}) = 12\cdot 20 = 240$, $D(Y_{12})=4800$

CGT: $P(Y_{12}\geq 580) = P\left(\frac{Y_{12}-240}{\sqrt{4800}} \geq \frac{580-240}{\sqrt{4800}}\right)$

$P(Y_{12}\geq 580) \approx \Phi(\infty) - \Phi(\dots)$

Verovatnoća, pismeni ispit, 28.8.2017.

Verovatnoća - pismeni ispit, smerovi M0, M1, M2, M3, M4

28. avgust 2017.

1. U loto igri četvorocifreni broj se bira na slučajan način u rasponu 0000 − 9999. Ako se na tiketu poslednje dve cifre poklapaju sa izvučenim brojem, ali ne i poslednje tri, nagrada je 50 evra. Zatim, nagrada je 500 evra ako se na tiketu poslednje tri cifre poklapaju, ali ne i sve četiri i 5000 evra se dobija u slučaju poklapanja svih cifara. Naći očekivani dobitak.

2. Neprekidne slučajne promenljive X i Y imaju zajedničku funkciju gustine
$$\varphi_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} cxe^{\frac{-1}{2}x(1+y^2)}, & x, y > 0 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$
Odrediti konstantu c. Odrediti marginalne gustine φ_X i φ_Y. Pokazati da su $Y\sqrt{X}$ i X nezavisne slučajne promenljive.

3. Vek trajanja sijalice je dat eksponencijalnom raspodelom. Ako je srednja vrednost veka trajanja sijalice od 60 vati 400 sati, a srednja vrednost veka trajanja sijalice od 80 vati 300 sati, naći verovatnoću da sijalica od 80 vati traje duže od sijalice od 60 vati. Pretpostavlja se da sijalice rade nezavisno jedna od druge.

4. Ako niz slučajnih promenljivih $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira u srednje kvadratnom ka slučajnoj promenljivoj X, dokazati da onda i $E(X_n) \to E(X), n \to \infty$.

5. Broj ljudi koji uđu u hiper market u toku jednog minuta ima Poasonovu $\mathcal{P}(7)$ raspodelu.
   (a) Odrediti verovatnoću da u toku tri sata u hiper market uđe bar 800 ljudi.
   (b) Koliko vremena treba da prođe da bi sa verovatnoćom 0.9 u hiper market ušlo bar 800 ljudi?

4. $X_n \xrightarrow{s.k.} X$, $n \to \infty$ akko 1) $E(X_n^2) < \infty$ i

2) $E(|X_n - X|^2) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Znamo da je $0 \leq \left(E(X_n) - E(X)\right)^2 = \left(E(X_n - X)\right)^2 \leq E(X_n - X)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow E(X_n) \to E(X), n \to \infty$.

Napomena: za $Z = X_n - X$ važi $D(Z) \geq 0$, odnosno,

$D(Z) = E(Z^2) - E^2(Z) \geq 0$, pa je

$E(Z^2) \geq E^2(Z)$, odnosno

$\left(E(X_n - X)\right)^2 \leq E(X_n - X)^2$.

(6) Neka je X - vek trajanja sijalice od ~~100~~ 60 vati,
Y - vek trajanja sijalice od 80 vati.

Treba odrediti $P(X < Y)$

Znamo, $\varphi_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$, $\varphi_X(x) = 0, x < 0$

$\varphi_Y(y) = \mu e^{-\mu y}, y \geq 0$, $\varphi_Y(y) = 0, y < 0$

Iz podataka u zadatku znamo da je $\frac{1}{\lambda} = 400$ i $\frac{1}{\mu} = 300$.

Pošto su X i Y nezavisne, sledi da je

$$P(X<Y) = \int_0^\infty \int_x^\infty \varphi_X(x)\varphi_Y(y)\,dx\,dy = \int_0^\infty \varphi_X(x)(1 - F_Y(x))\,dx,$$

gde je F_Y funkcija raspodele sluč. prom. Y

$$\Rightarrow P(X<Y) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} e^{-\mu x}\,dx = \lambda \cdot \frac{1}{\mu+\lambda}.$$

(5.) X_i - broj ljudi koji uđu u super market u toku i-tog minuta

$X_i : \mathcal{P}(7)$, $E(X_i) = 7$, $D(X_i) = 7$

Broj ljudi koji uđu u toku n minuta je: $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$

$$E(Y_n) = 7n, \quad D(Y_n) = 7n$$

Sluč. prom. $X_1, \ldots, X_n$ su nezavisne i sve imaju istu raspodelu, pa važi centralna granična teorema

(a) $n = 180$ $P(Y_{180} \geq 800) = 1 - P(Y_{180} < 800)$

$$P\left(\frac{Y_{180} - 7\cdot 180}{\sqrt{7\cdot 180}} < \frac{800 - 7\cdot 180}{\sqrt{7\cdot 180}}\right) = \ldots$$

(b) $P(Y_n \geq 800) \approx \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{800-7n}{\sqrt{7n}}\right) = 0.90$

$$\frac{800-7n}{\sqrt{7n}} = \ldots$$

2.
$$\varphi_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} c x e^{-\frac{1}{2}x(1+y^2)}, & x,y>0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$c=?$, φ_X, φ_Y? $Y\sqrt{X}$ i X nezavisne?

Treba da važi: $1 = \int_0^\infty \int_0^\infty c x e^{-\frac{1}{2}x(1+y^2)} dx dy =$

$$= c\int_0^\infty \left(x e^{-\frac{1}{2}x} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}xy^2} dy\right) dx =$$

$$= c\int_0^\infty x e^{-\frac{1}{2}x} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}y^2/\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2} dy\, dx$$

Važi: $\frac{1 \cdot 2}{a\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\frac{y^2}{a^2}} dy = 1, \; a>0$

Dakle, $\frac{\sqrt{x}\cdot 2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}y^2/\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2} dy = 1$, odnosno $\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}y^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2} dy = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{x}}$

$$\Rightarrow \quad 1 = c\int_0^\infty \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{x}} x e^{-\frac{1}{2}x} dx = \frac{c}{2}\int_0^\infty \sqrt{2\pi}\, x^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x} dx$$

$$s = +\frac{1}{2}x$$
$$+2ds = dx$$

$$1 = \frac{c}{2}\int_0^\infty \sqrt{2\pi}\sqrt{2s}\, e^{-s}\, 2ds = 2\frac{c}{2}\sqrt{2\pi}\sqrt{2}\int_0^\infty s^{\frac{1}{2}} e^{-s} ds$$

Znamo: $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$ (Gama funkcija)

Dakle, $1 = \frac{2c}{2}\sqrt{2}\sqrt{2\pi}\ \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4c}{2}\sqrt{\pi}\ \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4c}{2}\sqrt{\pi}\ \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{2c\pi}{2} = c\pi$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \qquad \boxed{c = \frac{1}{\pi}}$$

- $\varphi_X(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty x e^{-\frac{1}{2}x(1+y^2)} dy$, za $x > 0$

$\varphi_Y(y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty x e^{-\frac{1}{2}x(1+y^2)} dx$, $y > 0$

Dobija se, $\varphi_X(x) = \frac{1}{\pi} x e^{-\frac{1}{2}x}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}xy^2} dy = \frac{1}{\pi} x e^{-\frac{1}{2}x}\frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{x} e^{-\frac{1}{2}x}$

$\varphi_Y(y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty x e^{-\frac{1}{2}x(1+y^2)} dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{2s}{1+y^2} e^{-s}\frac{2ds}{1+y^2} =$

$\frac{1}{2}x(1+y^2) = s$

$= \frac{4}{\pi}\frac{1}{(1+y^2)^2}\int_0^\infty s e^{-s} ds$

parcijalna integracija

$$= \frac{4}{\pi}\frac{1}{(1+y^2)^2}\cdot 1, \quad y > 0$$

Dalje treba ispitati nezavisnost sluč. prom. $V = Y\sqrt{X}$ i $W = X$.
Prvo ćemo odrediti zajedničku gustinu za V i W

$v = y\sqrt{x}$
$w = x \Rightarrow x = w,\ y = \frac{v}{\sqrt{w}} \quad (x > 0, w > 0)$

$$J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{w}} & y_w \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{w}}$$

$\Rightarrow \varphi_{(V,W)}(v,w) = \frac{1}{\pi} w e^{-\frac{1}{2}w\left(1+\frac{v^2}{w}\right)}\left|-\frac{1}{\sqrt{w}}\right| = \frac{1}{\pi}\sqrt{w}\, e^{-\frac{1}{2}w} e^{-\frac{1}{2}v^2}$, $v, w > 0$

$\varphi_{(V,W)}(v,w) = 0$, inače

$$\varphi_V(v)=\int_0^\infty \varphi_{(V,W)}(v,w)\,dw,\quad \varphi_W(w)=\int_0^\infty \varphi_{(V,W)}(v,w)\,dv$$

$$\varphi_V(v)=\int_0^\infty \frac{1}{\pi}\sqrt{w}\,e^{-\frac{1}{2}w}e^{-\frac{1}{2}v^2}dw=\frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{2}v^2}\int_0^\infty \sqrt{w}\,e^{-\frac{1}{2}w}dw$$

$$\int_0^\infty \sqrt{w}\,e^{-\frac{1}{2}w}dw=2\sqrt{2}\,\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right)=2\sqrt{2}\,\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}=\sqrt{2}\sqrt{\pi}$$

$$\varphi_V(v)=\frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{2}v^2}\sqrt{2}\sqrt{\pi},\ \text{za } v>0$$

$$\varphi_W(v)=\int_0^\infty \frac{1}{\pi}\sqrt{w}\,e^{-\frac{1}{2}w}e^{-\frac{1}{2}v^2}dv=\frac{1}{\pi}\sqrt{w}\,e^{-\frac{1}{2}w}\underbrace{\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}v^2}dv}_{=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}}$$

$$\varphi_W(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{w}\,e^{-\frac{1}{2}w},\ w>0$$

$$\Rightarrow \varphi_V(v)\cdot\varphi_W(w)=\frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{\pi}e^{-\frac{1}{2}v^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{w}\,e^{-\frac{1}{2}w}=\frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{2}v^2}\sqrt{w}\,e^{-\frac{1}{2}w}$$

$$\Rightarrow \varphi_V(v)\,\varphi_W(w)=\varphi_{(V,W)}(v,w),\ \text{za sve } v,w$$

$\Rightarrow V$ i W su nezavisne sluč. prom.

(2) Neka je X – dobitak (u eurima)

Slučajna prom. X uzima vrednosti 0, 50, 500 ili 5000.

$$P(X=50)=\frac{10\cdot 9\cdot 1\cdot 1}{10\,000}$$

$$P(X=500)=\frac{9\cdot 1\cdot 1\cdot 1}{10\,000},\quad P(X=5000)=\frac{1}{10\,000}$$

$$P(X=0)=1-\frac{10\cdot 9}{10\,000}-\frac{9}{10\,000}-\frac{1}{10\,000}$$

$$E(X)=0+50\cdot\frac{9\cdot 10}{10\,000}+500\cdot\frac{9}{10\,000}+5\,000\cdot\frac{1}{10\,000}$$

Verovatnoća - pismeni ispit, M0, M1, M2, M3, M4

26. septembar 2017.

1. U kutiji su četiri loptice, jedna plava, jedna bela i dve crvene. Pera slučajno bira dve loptice odjednom, pogleda u loptice, i kaže da je crvena loptica među izvučenim lopticama. Koja je verovatnoća da su obe izvučene loptice crvene?

2. Slučajan vektor (X, Y) ima uniformnu raspodelu unutar jediničnog kvadrata. Naći raspodelu za $Z = \max\{XY, 1/2\}$. Da li je Z diskretna slučajna promenljiva?

3. Za neprekidne slučajne promenljive X i Y važi $\varphi_Y(y|x) = 1/x$ za $0 < y < x$ i $\varphi_Y(y|x) = 0$ inače. Marginalna gustina za X je data sa $\varphi_X(x) = 2x$ za $0 < x < 1$ i $\varphi_X(x) = 0$ inače. Odrediti $\varphi_X(x|y)$.

4. Ispitati sve četiri vrste konvergencije niza $\frac{1}{nX_n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Slučajne promenljive $X_1, X_2, \ldots$ su nezavisne i $X_n : U(0, 1)$, $n = 1, 2, \ldots$.

5. Računar prilikom sabiranja zaokružuje na najbliži ceo broj. Pretpostavimo da su greške zaokruživanja nezavisne i da imaju uniformnu raspodelu na intervalu $[-0.5, 0.5]$.

   (a) Ako se sabira 1500 brojeva, odrediti verovatnoću da apsolutna vrednost ukupne greške bude veća od 15.

   (b) Koliko najviše brojeva može da se sabira, pa da sa verovatnoćom 0.9 apsolutna vrednost ukupne greške bude manja od 10?

Verovatnoća - pismeni ispit, M0, M1, M2, M3, M4

26. septembar 2017.

1. U kutiji su četiri loptice, jedna plava, jedna bela i dve crvene. Pera slučajno bira dve loptice odjednom, pogleda u loptice, i kaže da je crvena loptica među izvučenim lopticama. Koja je verovatnoća da su obe izvučene loptice crvene?

2. Slučajan vektor (X, Y) ima uniformnu raspodelu unutar jediničnog kvadrata. Naći raspodelu za $Z = \max\{XY, 1/2\}$. Da li je Z diskretna slučajna promenljiva?

3. Za neprekidne slučajne promenljive X i Y važi $\varphi_Y(y|x) = 1/x$ za $0 < y < x$ i $\varphi_Y(y|x) = 0$ inače. Marginalna gustina za X je data sa $\varphi_X(x) = 2x$ za $0 < x < 1$ i $\varphi_X(x) = 0$ inače. Odrediti $\varphi_X(x|y)$.

4. Ispitati sve četiri vrste konvergencije niza $\frac{1}{nX_n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Slučajne promenljive $X_1, X_2, \ldots$ su nezavisne i $X_n : U(0, 1)$, $n = 1, 2, \ldots$.

5. Računar prilikom sabiranja zaokružuje na najbliži ceo broj. Pretpostavimo da su greške zaokruživanja nezavisne i da imaju uniformnu raspodelu na intervalu $[-0.5, 0.5]$.

   (a) Ako se sabira 1500 brojeva, odrediti verovatnoću da apsolutna vrednost ukupne greške bude veća od 15.

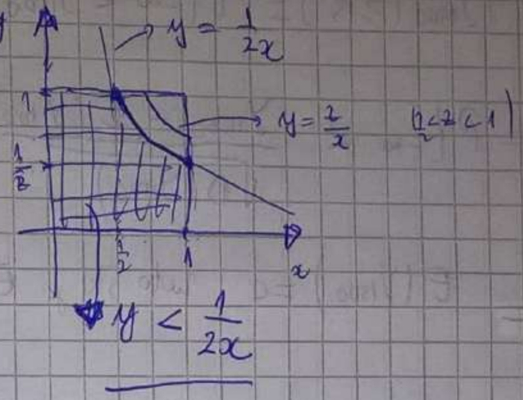
   (b) Koliko najviše brojeva može da se sabira, pa da sa verovatnoćom 0.9 apsolutna vrednost ukupne greške bude manja od 10?

VEROVATNOĆA, 26.9.2017.

2. (X,Y), $Z=\max\{XY, \frac{1}{2}\}$

Primetimo da je $P\{Z<\frac{1}{2}\}=0$

$P\{Z=\frac{1}{2}\}=P\{XY<\frac{1}{2}\}$



$y=\frac{1}{2x}$

$x=\frac{1}{2}\quad y=1$

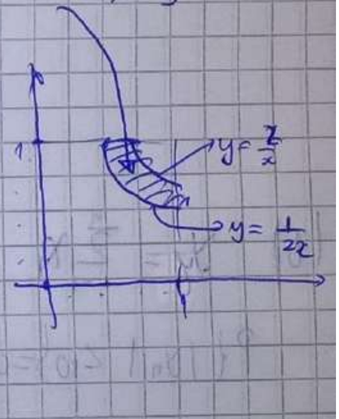
$y<\frac{1}{2x}$

- $P\{Z=\frac{1}{2}\}=P\{XY<\frac{1}{2}\}=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{1}dx\,dy+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_0^{\frac{1}{2x}}dx\,dy=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2$

- Neka je $\frac{1}{2}<z<1$. Tada je

$$P\{\tfrac{1}{2}<Z<z\}=P\{\tfrac{1}{2}<XY<z\}=P\{\tfrac{1}{2X}<Y<\tfrac{z}{X}\}=$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{z}\int_{\frac{1}{2x}}^{1}dy\,dx+\int_{z}^{1}\int_{\frac{1}{2x}}^{\frac{z}{x}}dy\,dx=z(1-\ln z)-\frac{1}{2}(1+\ln 2)$$



- $P\{Z<z\}=1$, za $z>1$.

Sledi da Z nije diskretna slučajna promenljiva.

5. X_k - greška zaokruživanja k-tog broja, $k=1,\dots,1500$

X_k su međusobno nezavisne i $X_k: U(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $k\in\{1,2,\dots,1500\}$

Neka je $Y_{1500}=\sum_{k=1}^{1500}X_k$ - ukupna greška koja nastaje pri sabiranju 1500 brojeva

Treba odrediti $P\{|Y_{1500}|\geq 15\}$.

Znamo, ako $X : U(a,b)$, onda $E(X) = \frac{a+b}{2}$, $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

$$P\{|Y_{1500}| \geq 15\} = P\{-\infty < Y_{1500} \leq -15\} + P\{15 \leq Y_{1500} < \infty\}$$

$$= P\left\{-\infty < \frac{Y_{1500} - E(Y_{1500})}{\sqrt{D(Y_{1500})}} \leq \frac{-15-E}{\sqrt{D}}\right\} + P\left\{\frac{15-E(Y_{1500})}{\sqrt{D}} \leq \frac{Y_{1500} - E(Y_{1500})}{\sqrt{D(Y_{1500})}} < \infty\right\}$$

$E(Y_{1500}) = 0$ zato što je $E(X_k) = 0$, $k \in \{1, \dots, 1500\}$

$X_k : U\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$D(X_k) = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2}{12} = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow D(Y_{1500}) = \frac{1500}{12}$$

CGT: $$P\{|Y_{1500}| \geq 15\} \approx \Phi\left(\frac{-15}{\sqrt{\frac{1500}{12}}}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{15}{\sqrt{\frac{1500}{12}}}\right) =$$

$$= 1 - 2\Phi\left(\frac{15}{\sqrt{\frac{1500}{12}}}\right)$$

(b) $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$

$P\{|Y_n| < 10\} = 0.9$

$$2\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right) = 0.9 \Rightarrow n \approx 441$$

(1) A – obe izvučene loptice su crvene

B – među izvučenim lopticama je jedna crvena.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{5}$$

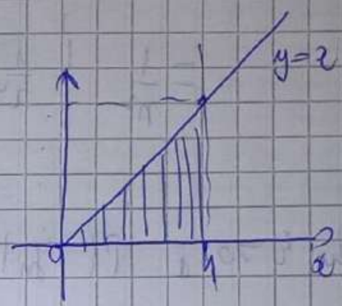
Mogućnosti: C_1C_2, C_1P, C_1B, C_2B, C_2P, BP

③ $\varphi_Y(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0<y<x \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$ $\varphi_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0<x<1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$

Odrediti $\varphi_X(x|y)$.

$$\varphi(x,y) = \varphi_X(x)\,\varphi_Y(y|x)$$

$$\Rightarrow \varphi_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 2, & 0<x<1,\ 0<y<x \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \varphi_Y(y) = \int_y^1 \varphi(x,y)\,dx, \quad \text{za } 0<y<1$$

$$\Rightarrow \varphi_Y(y) = \int_y^1 2\,dx = 2(1-y), \quad 0<y<1$$

Dalje je $\varphi(x,y) = \varphi_Y(y)\,\varphi_X(x|y)$, pa je za $\underline{0<y<1}$

$$\varphi_X(x|y) = \frac{1}{1-y}, \quad \text{za } \underline{y<x<1}$$

$$\varphi_X(x|y) = 0, \quad \text{inače}.$$

④ $\left(\frac{1}{nX_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $X_1, X_2, \ldots$ nezavisne, $X_n : \mathcal{U}(0,1)$, $n=1,2,\ldots$

Neka je $Y_n = \frac{1}{nX_n}$

Tada je $F_{Y_n}(y) = P\{Y_n < y\} = P\{\frac{1}{nX_n} < y\} = P\{X_n > \frac{1}{ny}\} =$

$$= \begin{cases} 1-\frac{1}{ny}, & \frac{1}{n}<y<\infty \\ 0, & y \le \frac{1}{n} \end{cases} \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 1, & y>0 \\ 0, & y\le 0 \end{cases} = F_0(y)$$

$\Rightarrow Y_n \xrightarrow{r} Y\equiv 0$ (konvergira ka 0 u raspodeli)

Pošto je $Y\equiv 0$ konstanta $\Rightarrow$ konvergira u verovatnoći ka $Y\equiv 0$.

$E(Y_n^2) = ?$ (ispitujemo srednje kvadratnu konvergenciju)

$$E(Y_n^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \varphi_{Y_n}(y)\,dy \qquad Y_n^2 = \frac{1}{n^2 X_n^2}$$

$$\Rightarrow E(Y_n^2) = E\left(\frac{1}{n^2}\frac{1}{X_n^2}\right) = \frac{1}{n^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2}\varphi_{X_n}(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{n^2}\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \infty \Rightarrow \text{nemamo konvergenciju u srednje kvadratnom}$$

Za $\varepsilon > 0$ je $P\{|Y_n| \geq \varepsilon\} = P\{X_n < \frac{1}{n\varepsilon}\} = \begin{cases} \frac{1}{n\varepsilon}, & n \geq \frac{1}{\varepsilon} \\ 1, & n < \frac{1}{\varepsilon} \end{cases}$

$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P\{|Y_n| \geq \varepsilon\}$ divergira

$\Rightarrow$ nemamo skoro sigurnu konvergenciju