1 Tejlorova formula

- želimo da aproksimiramo proizvoljnu funkciju $f(x)$ pomoću Tejlorovog polinoma $n-$tog stepena u tački x_0

$$T_n(x;x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

- da bismo koristili Tejlorov polinom $T_n(x;x_0)$ umesto funkcije $f(x)$, potrebno je znati procenu izraza

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x;x_0),$$

  koji nazivamo ostatkom

- procenom ostatka zapravo ocenjujemo grešku aproksimacije $f(x) \approx T_n(x;x_0)$ u okolini tačke x_0

Teorema 1.1. ***(Peanov oblik ostatka)***
Neka funkcija $f(x)$, neprekidna zajedno sa svim svojim izvodima do $(n-1)-$og reda u nekoj okolini tačke x_0, ima $n-$ti izvod u toj okolini. Tada za x iz okoline tačke x_0 važi formula

$$f(x) = T_n(x;x_0) + R_n(x),$$

pri čemu ostatak ima oblik

$$R_n(x) = o((x-x_0)^n).$$

Teorema 1.2. ***(Lagranžov oblik ostatka)***
Neka funkcija $f(x)$, neprekidna zajedno sa svim svojim izvodima do $n-$tog reda u nekoj okolini tačke x_0, ima $(n+1)-$vi izvod u toj okolini. Tada za x iz okoline tačke x_0 važi formula

$$f(x) = T_n(x;x_0) + R_n(x),$$

pri čemu ostatak ima oblik

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

gde je ξ realan broj između x i x_0.

Teorema 1.3. ***(Integralni oblik ostatka)***
Neka funkcija $f(x)$, neprekidna zajedno sa svim svojim izvodima do $n-$tog reda u nekoj okolini tačke x_0, ima $(n+1)-$vi izvod u toj okolini i $f^{(n+1)}$ je integrabilna funkcija. Tada za x iz okoline tačke x_0 važi formula

$$f(x) = T_n(x;x_0) + R_n(x),$$

pri čemu ostatak ima oblik

$$R_n = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

Napomena 1.4. Ako je funkcija f polinom stepena n, onda je ona jednaka svom Tejlorovom polinomu $n-$tog stepena, odnosno važi $f(x) = T_n(x;x_0)$, za sve $x_0 \in \mathbb{R}$.

Napomena 1.5. Procena greške aproksimacije
Ako postoji $M > 0$ takvo da je $|f^{(n+1)}(\xi)| \leq M$ za $\xi \in (x_0, x)$, onda je

$$R_n(x) \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$$

1.1 Maklorenov polinom

Maklorenov polinom je specijalan slučaj Tejlorovog polinoma za $x_0 = 0$, tj. $M_n(x) = T_n(x; 0)$.
U nastavku data je tablica Maklorenovog razvoja funkcije u red

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R} \\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x \in \mathbb{R} \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},\ x \in \mathbb{R} \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n\ , |x| < 1 \\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}\ , -1 < x \leq 1 \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n\ , |x| < 1
\end{aligned}
$$

$$
\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}
$$

1.2 Zadaci

1. Linearizovati funkciju $f(x) = 4\sqrt{x+3}$ u okolini tačke $x_0 = 1$.
2. Aproksimirati funkciju $f(x) = \sqrt[3]{x}$ Tejlorovim polinomom stepena 2 u tački $x_0 = 8$ i proceniti grešku aproksimacije za $7 \leq x \leq 9$.
3. Odrediti Maklorenov polinom trećeg stepena za funkciju $f(x) = e^{2x} + 1$.
4. Primenom Tejlorove formule napisati polinom $P(x) = x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 7x + 6$ po stepenima od $(x-2)$.

2 Nule polinoma

Dat je polinom n-tog stepena $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

- Ako je a nula polinoma $P_n(x)$, onda je $P_n(a) = 0$ i $(x - a)$ deli $P_n(x)$
- Kandidati za racionalne nule polinoma $P_n(x)$ su brojevi oblika $\pm\frac{p}{q}$,
  gde za p uzimamo sve moguće delioce broja a_0, a za q sve moguće delioce broja a_n
- **Hornerovom šemom** proveravamo da li je neki broj nula polinoma

Primer 2.1. *Kandidati za racionalne nule polinoma* $P(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 19$ *su* $\pm 1,\ \pm 19.$

Primer 2.2. *Primenom Hornerove šeme, pokazati da je*

$$P(x) = 2x^4 - 13x^3 + 28x^2 - 23x + 6 = (x-1)(x-2)(x-3)(2x-1).$$

3 Njutnova metoda

Numerička metoda za rešavanje jednačine $f(x) = 0$
Niz aproksimacija:

$$x_0 - \text{početna tačka} \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Primer 3.1. *Naći nulu polinoma* $f(x) = 5x^2 + 7x - 52$ *na intervalu* $[2, 3]$ *prvo rešavajući kvadratnu jednačinu, a zatim Njutnovom metodom.*

Primer 3.2. *Primenom Njutnove metode približno odrediti nulu polinoma* $f(x) = x^3 + x - 1$ *koja se nalazi na intervalu* $[0, 1]$.

4 Ojlerova metoda

Metoda za približno određivanje rešenja diferencijalne jednačine $y' = f(x, y)$, sa početnim uslovom $y(a) = y_0$
Postupak:

- odredimo interval na kom tražimo aproksimaciju rešenja: $[a, b]$
- odredimo broj iteracija N i korak iteracije $h = \frac{b-a}{N}$
- odredimo niz ekvidistantnih tačaka $x_0 = a,\ \ x_1 = a + h,\ \ x_2 = a + 2h$, ... $x_N = b$
- računamo aproksimacije rešenja u tačkama x_1, x_2, ..., x_N pomoću formule:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \qquad n = 0, 1, 2, ..., N - 1$$

Primer 4.1. *Primeniti Ojlerov postupak na jednačinu* $y' = y$ *sa početnim uslovom* $y(0) = 1$ *na intervalu* $[0, x]$.

Primer 4.2. *Približno odrediti rešenje jednačine* $y' = 2 - 2y - e^{-4x}$, *sa početnim uslovom* $y(0) = 1$ *na intervalu* $[0, 0.5]$ *sa korakom* $h = 0.1$. *Uporediti tačno rešenje problema sa približnim, ako je poznato da je funkcija* $y(x) = 1 + \frac{1}{2}e^{-4x} - \frac{1}{2}e^{-2x}$ *tačno rešenje.*