

1 Neodređeni integral

1.1 Integrali trigonometrijskih funkcija

Integrali trigonometrijskih funkcija su oblika

$$\int R(\sin x, \cos x) dx,$$

gde je R racionalna funkcija dve promenljive. **Univerzalnom trigonometrijskom smenom** $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ se svode na integral racionalne funkcije. Pri tome je

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dx.$$

Specijalno,

- ako je $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, onda je smena $t = \cos x$;
- ako je $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, onda je smena $t = \sin x$;
- ako je $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, onda je smena $t = \operatorname{tg} x$.

1.1.1 Zadaci

1. Izračunati sledeće integrale:

$$(a) \int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx, \quad (b) \int \frac{1}{\sin^2 x \cos x} dx, \quad (c) \int \frac{1}{1 + \sin x + \cos x} dx.$$

2 Određeni integral, primene

2.1 Površina ispod grafika funkcije

★ Podsetimo se,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

i

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad F' = f,$$

je određeni integral funkcije f i predstavlja površinu ispod grafika krive (za nenegativne funkcije).

2.1.1 Zadaci

1. Odrediti površinu ograničenu krivom $y = \ln x$, x - osom i pravom $x = e$.
2. Odrediti površinu ograničenu krivim linijama $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$.
3. Odrediti površinu ograničenu sa $f(x) = e^x$, $f(x) = e^{-x}$, $x = 1$.
4. Izračunati površinu ograničenu graficima funkcija $f(x) = \frac{x^2}{2}$, $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
5. Naći površinu figure ograničene krivama $y = x$, $y = -4x + 20$, $x = 2$, $y = 0$.
6. Naći površinu figure ograničene krivama $y = x^2 - 12x + 36$, $y = x^2$, $y = 4$, $y = 0$.

2.2 Dužina luka krive

Dužina luka krive L može se aproksimirati izlomljenim linijama ili tačnije zbirom dužina ovih linija:

$$L \approx \sum_{i=1}^n |P_i P_{i-1}|,$$

gde je $|P_i P_{i-1}|$ dužina duži $P_i P_{i-1}$.

Kada povećavamo broj intervala na x -osi, tj. kada $n \rightarrow \infty$ dobijamo baš dužinu luka krive:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |P_i P_{i-1}|. \quad (1)$$

Primitimo sada da se dužina $|P_i P_{i-1}|$ može izračunati kao

$$|P_i P_{i-1}| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Ako iskoristimo teoremu srednje vrednosti, znamo da postoji $x_i^* \in (x_{i-1}, x_i)$ tako da je $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = f'(x_i^*)\Delta x$. Vratimo se u formulu (1):

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{(\Delta x)^2 + (f'(x_i^*)\Delta x)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'(x_i^*)^2} \Delta x, \quad (2)$$

a ovo sada prepoznamo kao integral:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

2.2.1 Zadaci

1. Izračunati obim kruga poluprečnika r , $r > 0$.
2. Naći dužinu luka krive date funkcijom $f(x) = \ln(2 \cos x)$ na intervalu $[0, \frac{\pi}{3}]$.

2.3 Površina površi

Na sličan način kao za slučaj dužine luka krive, moguće je zaključiti da je površina površi koja se dobija kada se kriva $y = f(x)$ rotira oko x -ose zapravo integral:

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

2.3.1 Zadaci

1. Naći površinu površi dobijene rotiranjem krive $y = \sqrt{4 - x^2}$ oko x -ose, na intervalu $[-1, 1]$.
2. Naći površinu površi dobijene rotiranjem krive $y = e^x$ oko x -ose, na intervalu $[0, 1]$.

2.4 Zapremina tela

Zapremina tela koje nastaje rotiranjem krive $y = f(x)$ oko x -ose na intervalu $[a, b]$ računa se pomoću formule:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

2.4.1 Zadaci

1. Izračunati zapreminu lopte poluprečnika $r > 0$.
2. Izračunati zapreminu tela koje nastaje rotiranjem krive $y = e^x$ oko x -ose na intervalu $[\ln 2, \ln 7]$.