1 Neodređeni integral

1.1 Zadaci

1. Izračunati sledeće integrale: (a) $\int e^{\sqrt{x}}dx$, (b) $\int \sin(\ln x)dx$.

1.2 Integrali racionalnih funkcija

1.2.1 Racionalne funkcije

Racionalna funkcija $R(x)$ je količnik dva polinoma,

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}.$$

Ako je $n < m$ kažemo da je $R(x)$ **prava racionalna funkcija**,
ako je $n \geq m$ kažemo da je $R(x)$ **neprava racionalna funkcija**.

Svaka prava racionalna funkcija može se predstaviti kao zbir elementarnih racionalnih funkcija, koje su oblika

$$\frac{A}{(x-a)^n} \quad \text{ili} \quad \frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^n},$$

gde je $x^2 + px + q$ nesvodljiv polinom nad $\mathbb{R}$ (nema realnih nula).

1.2.2 Zadaci

1. Izračunati sledeće integrale:
   (a) $\int \frac{4x+1}{x^2-3x-10}dx$, (b) $\int \frac{5x^2-13x+2}{x^3-2x^2-4x+8}dx$, (c) $\int \frac{x+1}{x^3-2x^2+x-2}dx$,
   (d) $\int \frac{x^3-2x-35}{x^2-2x-15}dx$.

   Rešenje.

   (a) $\int \frac{4x+1}{x^2-3x-10}dx = \int \frac{1}{x+2}dx + \int \frac{3}{x-5}dx$

   (b) $\int \frac{5x^2-13x+2}{x^3-2x^2-4x+8}dx = \int \frac{2}{x-2}dx - \int \frac{1}{(x-2)^2}dx + \frac{3}{x+2}dx$

   (c) $\int \frac{x+1}{x^3-2x^2+x-2}dx = \int \frac{A}{x-2}dx + \int \frac{Bx+C}{x^2+1}dx,\ A = \frac{3}{5}, B = -\frac{3}{5}, C = -\frac{1}{5}$

   (d) $\int \frac{x^3-2x-35}{x^2-2x-15}dx = \int (x+2)dx + \int \frac{A}{x-5}dx + \int \frac{B}{x+3}dx,\ A = 10, B = 7$

Zadaci za domaći:
Sledeće racionalne funkcije napisati kao zbir elementarnih racionalnih funkcija i izračunati njihove integrale.

1. $\frac{x^3-3x^2+9}{x^2-5x+6}$

2. $\frac{2x^2-3x+1}{x^3+2x^2+x+2}$

3. $\frac{x^3-2x^2-1}{x^4-5x^3+9x^2-7x+2}$

Rešenje.

1. $\dfrac{x^3 - 3x^2 + 9}{x^2 - 5x + 6} = (x+2) - \dfrac{5}{x-2} + \dfrac{9}{x-3}$
2. $\dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 + 2x^2 + x + 2} = \dfrac{3}{x+2} - \dfrac{x+1}{x^2+1}$
3. $\dfrac{x^3 - 2x^2 - 1}{x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2} = -\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{3}{(x-1)^2} + \dfrac{2}{(x-1)^3}$

1.3 Metod Ostrogradskog

Metod Ostrogradskog se koristi za rešavanje integrala oblika

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx,$$

gde je $P_n(x)$ polinom n-tog stepena, a $a, b, c \in \mathbb{R}$. Rešenja se dobija iz jednakosti:

$$\int \frac{Pn(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx.$$

Koeficijenti polinoma $Q_{n-1}(x)$ i konstanta λ određuju se diferenciranjem prethodnog izraza.

1.3.1 Zadaci

1. Izračunati sledeće integrale:
   (a) $\displaystyle\int \sqrt{1 - x^2} dx,$ (b) $\displaystyle\int \frac{x^3 + 3x}{\sqrt{-x^4 - 2x^2 + 5}} dx.$

1.4 Integrali nekih iracionalnih funkcija

1. Izračunati sledeće integrale:
   (a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} dx,$ (b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} - 1} .dx$