Izvod složene funkcije

Vežbe 5 17/18

$$\boxed{(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)}$$

1. Odrediti izvod (prvi) sledećih (složenih) funkcija:

(a) $y=(x+2)^3$ (b) $y=\sin^2 x$ (c) $y=2\sin(6x)$

(d) $y=x^2e^{-2x}$ (e) $y=e^{-x}(\sin x+\cos x)$

(f) $y=\frac{1}{2}\ln(\operatorname{tg}x)+\ln(\cos x)$ (g) $y=\frac{\ln 3x}{x}$

Rešenje:

(a) $y'=3(x+2)^2\cdot(x+2)'=3(x+2)^2$

(b) $y'=2\sin x\cdot(\sin x)'=2\sin x\cos x$

(c) $y'=2\cos(6x)\cdot 6=12\cos(12x)$

(d) $y'=2xe^{-2x}+x^2e^{-2x}(-2)=2xe^{-2x}(1-x)$

(e) $y'=-e^{-x}(\sin x+\cos x)+e^{-x}(\cos x-\sin x)$

$=e^{-x}(-\sin x-\cancel{\cos x}+\cancel{\cos x}-\sin x)=-2\sin x\,e^{-x}$

(f) $y'=\frac{1}{2}\frac{1}{\operatorname{tg}x}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)+\frac{1}{\cos x}(-\sin x)$

$=\frac{1}{2}\frac{\cancel{\cos x}}{\sin x}\frac{1}{\cos^{\cancel{2}} x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1-2\sin^2 x}{2\sin x\cos x}=\frac{1-2\sin^2 x}{\sin 2x}$

(g) $y'=\frac{\frac{1}{3x}\cdot 3\cdot x-\ln 3x}{x^2}=\frac{1-\ln 3x}{x^2}$

2. Odrediti prvi izvod datih funkcija:

(a) $y = \ln(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})$ (b) $y = \sqrt{1+\sin x}$

(c) $y = \ln\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}, a \in \mathbb{R}$

Rešenje:

(a) $y' = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} \left(x^{\frac{1}{2}} - (x-1)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} \left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)$

$= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$

(b) $y' = \frac{1}{2\sqrt{1+\sin x}} (1+\sin x)' = \frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}$

(c) $y' = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \left(\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right)' = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \frac{1}{2\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}} \left(\frac{a+x}{a-x}\right)'$

$= \frac{1}{2} \frac{a-x}{a+x} \frac{a-x-(a+x)(-1)}{(a-x)^2} = \frac{a}{(a-x)(a+x)}$

## Teorema srednje vrednosti:

Neka je $y=f(x)$ funkcija koja ima sledeće osobine:

- $f(x)$ je neprekidna na $[a,b]$
- $f(x)$ je diferencijabilna na $(a,b)$.

Tada postoji bar jedna tačka $c\in(a,b)$ takva da je

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

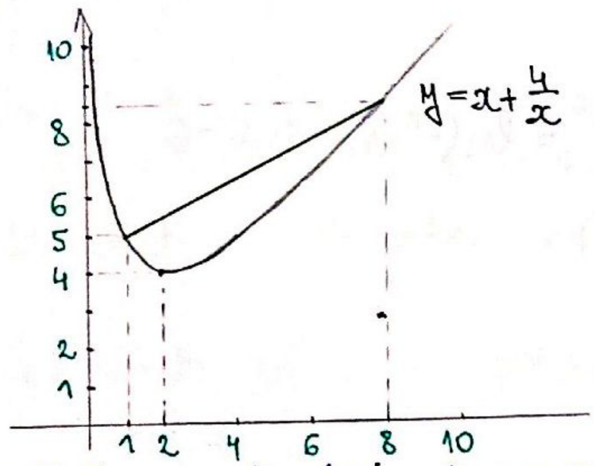
## Zadaci

1. (a) Skicirati grafik funkcije $f(x)=x+\frac{4}{x}$ u $[0,10]\times[0,10]$
   (b) Nacrtati sečicu kroz tačke $(1,5)$ i $(8,8.5)$
   (c) Naći $c$ koje zadovoljava zaključak teoreme o srednjoj vrednosti na $[1,8]$

Napomena: Primetiti da $f$ ne zadovoljava uslove teoreme srednje vrednosti na intervalu $[0,10]$. Zašto?

## Rešenje:

(a)




$x+\frac{4}{x}=0 \iff x^2+4=0$

što nije moguće $\Rightarrow$ nema nule

$f'(x)=1-\frac{4}{x^2}=0 \iff$

$x^2-4=0 \iff x=+2 \vee x=-2$

$+\quad -\quad +$

$-2\quad 2$

$\nearrow\quad\searrow\quad\nearrow$

$f(2)=2+2=4$

(b) Sečica: koeficijent pravca $f'(c)=\frac{8.5-5}{8-1}=\frac{3.5}{7}=\frac{1}{2}$

(c) $f'(x)=1-\frac{4}{x^2}$

Tražimo $c$ takvo da $f'(c)=1-\frac{4}{c^2}=\frac{1}{2}$

$\iff \frac{1}{2}-\frac{4}{x^2}=0 \iff \frac{x^2-8}{2x^2}=0 \iff x=\pm 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow c=2\sqrt{2}$

F-ja ne zadovoljava uslove Teoreme na $[0,10]$
(nije neprekidna u nuli)

2. Proveriti da li važe uslovi teoreme o srednjoj vrednosti za sledeće funkcije na datom intervalu. Zatim naći sve brojeve $c$ za koje važi zaključak teoreme

(a) $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ , $[-1,1]$

(b) $f(x) = e^{-2x}$ , $[0,3]$

Rešenje:

(a) $f$ je neprekidna i diferencijabilna na $[-1,1]$

$f'(c) = 6c+2$

$c = ?$ $\quad 6c+2 = \frac{f(1)-f(-1)}{2} = \frac{\cancel{3}+2+\cancel{5}-\cancel{3}+2-\cancel{5}}{2} = 2$

$\Rightarrow \quad c = 0$

(b) $f$ je neprekidna i diferencijabilna na $[0,3]$

$f'(x) = -2e^{-2x}$

$c = ?$ $\quad -2e^{-2c} = -\frac{1-e^{-6}}{3}$

$e^{-2c} = \frac{1-e^{-6}}{6} = \frac{e^6-1}{6e^6} \quad /\ln$

$-2c = \ln(e^6-1) - \ln 6 - \ln e^6 = \ln(e^6-1) - \ln 6 - 6$

$c = -\frac{1}{2}(\ln(e^6-1) - \ln 6 - 6)$

3. Neka je $f(x)=(x-3)^{-2}$. Pokazati da ne postoji $c\in(1,4)$ tako da je $f(4)-f(1)=f'(c)(4-1)$. Zašto ovo nije u kontradikciji sa teoremom srednje vrednosti?

Rešenje: $f'(c)=-2(c-3)^{-3}$

$$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{1^{-2}-(-2)^{-2}}{3}=\frac{1-\frac{1}{4}}{3}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$$

pretpostavimo suprotno: $\frac{-2}{(c-3)^3}=\frac{1}{4}$ $\qquad (c-3)^3=-8$

$c-3=-2 \Rightarrow c=1$

$$\frac{(c-3)^3+2\cdot4}{4(c-3)^3}=0 \iff c^3-9c^2+27c-19=0$$

$\Rightarrow c=1$, a ostali koreni su kompleksni

$\Rightarrow c\notin(1,4)$

Ovo nije u kontradikciji sa teoremom srednje vrednosti jer $f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}$ nije neprekidna na $(1,4)$ (ima prekid u $x=3\in(1,4)$) pa ne važe uslovi teoreme.

$\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=-\infty$

$\boxed{\text{Hornerova šema:}}$

$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$

kandidati za racionalne nule su: $\pm\frac{\text{svi mogući delioci } a_0}{\text{svi mogući delioci } a_n}$

kandidati za nule polinoma $P(x)=x^3-9x^2+27x-19$ su $\pm1, \pm19$

$P(1)=1-9+27-19=0$

| | 1 | -9 | 27 | -19 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | -8 | 19 | 0 |

$P(x)=(x-1)(x^2-8x+19)$

$x_{1/2}=\frac{8\pm\sqrt{64-76}}{2}$ nema realnih nula

Za vežbu: $P(x)=2x^4-13x^3+28x^2-23x+6$
$=(x-1)(x-2)(x-3)(2x-1)$

4. Pokazati da jednačina $1+2x+x^3+4x^5=0$ ima tačno jedan realan koren.

Rešenje: Funkcija $f(x)=1+2x+x^3+4x^5$ je neprekidna na $\mathbb{R}$ i važi

$f(-1)=1-2-1-4=-6<0$

$f(1)=1+2+1+4=8>0$

$\Rightarrow$ postoji bar jedno rešenje jednačine na $(-1,1)$
(funkcija će morati bar jednom da preseče $x$-osu, jer je neprekidna i različitog znaka na krajevima intervala)

$f'(x)=2+3x^2+20x^4>0$ za svako $x\in(-1,1)$
(funkcija je strogo rastuća na $(-1,1)$ pa će moći da preseče $x$-osu najviše jednom)

$\Rightarrow$ Rešenje je jedinstveno

U suprotnom, teorema srednje vrednosti bi implicirala da $\exists c\in(-1,1)$ tako da $f'(c)=0$

tj. ako pretpostavimo da postoje dva rešenja $a\neq b$
Imamo $f(a)=f(b)=0$

$$\overset{t.s.v}{\Rightarrow} \exists c\in(a,b) \quad f'(c)=\frac{0-0}{b-a}=0,$$

a mi smo pokazali da $f'(x)>0 \ \forall x\in(-1,1)$

Ali kako $f'(x)>0 \ \forall x\in\mathbb{R}$ (strogo rastuća)

Imamo $f(x)<0 \ \forall x<-1$

$f(x)>0 \ \forall x>1$

5. Pokazati da jednačina $x^3 - 15x + c = 0$, $c \in \mathbb{R}$, ima najviše jedan koren u intervalu $[-2,2]$.

Rešenje:

Pretpostavimo suprotno: da ima 2 ili više korena.
Neka su $a$ i $b$ takvi da $f(a) = f(b) = 0$.
Tada postoji $c \in (a,b) \subset [-2,2]$ takvo da $f'(c) = 0$.
Sa druge strane, imamo

$$f'(x) = 3x^2 - 15 \quad i \quad f'(x) = 0 \iff x^2 = 5 \iff x = \pm\sqrt{5} \notin [-2,2]$$

Kontradikcija!

6. Neka je za sve $x \in \mathbb{R}$ ispunjeno $3 \leq f'(x) \leq 5$.
Pokazati da je tada

$$18 \leq f(8) - f(2) \leq 30.$$

Rešenje:

Teorema srednje vrednosti:
$$f(8) - f(2) = f'(c) \cdot (8-2) = 6 \cdot f'(c)$$

tako
$$6 \cdot 3 \leq 6 \cdot f'(c) \leq 5 \cdot 6$$

$$\Rightarrow 18 \leq f(8) - f(2) \leq 30$$

7. Pomoću teoreme o srednjoj vrednosti pokazati

$$\sin a - \sin b \le a - b$$

za sve $a, b \in \mathbb{R}$.

Rešenje: Funkcija $\sin x$ je neprekidna i diferencijabilna na $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \forall a, b \in \mathbb{R} \quad \exists c \in (a, b) \qquad f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$-1 \le f'(c) = \cos c \le 1 \qquad \Rightarrow \quad -1 \le \dfrac{\sin b - \sin a}{b - a} \le 1$

$$\Rightarrow \quad a - b \le \underline{\sin b - \sin a \le b - a}$$

8. U 14:00 auto se kreće brzinom 30km/h. U 14:10 brzina je 50km/h. Pokazati da je u nekom momentu između 14:00 i 14:10 ubrzanje tačno 120 km/h$^2$.

Rešenje:

Vremenski interval je 10 minuta $= \frac{1}{6}$h

$v(0) = 30$

$v(\frac{1}{6}) = 50$ $\quad \Rightarrow \exists c \in (0, \frac{1}{6})$ takvo da

$$v'(c) = \frac{v(\frac{1}{6}) - v(0)}{\frac{1}{6} - 0} = \frac{20}{\frac{1}{6}} = 120 \frac{km}{h^2}$$

$v'(c)$ je ubrzanje u trenutku $c$