Verovatnoća – pismeni ispit (svi smerovi)
17. septembar 2018.

1. U kutiji su tri bele i dve crne kuglice. Pera izvlači po jednu kuglicu, na slučajan način. Ako izvuče belu kuglicu, onda će u kutiju da vrati crnu kuglicu i obratno, ako izvuče crnu kuglicu, u kutiju će vratiti belu kuglicu. Postupak se ponavlja dok u kutiji sve kuglice ne postanu crne. Kolika je verovatnoća da je potrebno ne više od pet izvlačenja da bi se ovo postiglo?

Rešenje. Ne više od pet izvlačenja dok sve kuglice ne postanu crne znači da je bilo tri ili pet izvlačenja. Verovatnoća da su potrebna tri izvlačenja dok sve kuglice ne budu crne je $p_1 = \frac{3}{5} * \frac{2}{5} * \frac{1}{5}$.

Pet izvlačenja je potrebno samo ako jedno od prva tri izvlačenja da crnu lopticu, a ostala četiri belu. Verovatnoća da je potrebno pet izvlačenja dok sve kuglice ne budu crne je

$$p_2 = \frac{2}{5} * \frac{4}{5} * \frac{3}{5} * \frac{2}{5} * \frac{1}{5} + \frac{3}{5} * \frac{3}{5} * \frac{3}{5} * \frac{2}{5} * \frac{1}{5} + \frac{3}{5} * \frac{2}{5} * \frac{4}{5} * \frac{2}{5} * \frac{1}{5}.$$

Tražena verovatnoća je $p_1 + p_2$.

2. Vozač može da bira jedan od dva puta da bi došao do Novog Sada. Neka su X i Y slučajne promenljive koje predstavljaju vreme trajanja putovanja za prvi, respektivno drugi put. Zajednička funkcija gustine za X i Y je data sa $\varphi_{(X,Y)}(x, y) = \dfrac{1}{10} e^{-\frac{1}{2}(y+3-x)}$ za $5 < x < 10$ i $y > x - 3$ i $\varphi_{(X,Y)}(x, y)$ je nula inače. Odrediti verovatnoću da će vozaču trebati više vremena da stigne ako odabere drugi put.

Rešenje. $P(X < Y) = \dfrac{1}{10} \displaystyle\int_5^{10} \int_x^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y+3-x)} dy dx = e^{-\frac{3}{2}}$

3. (a) Da li zbir dve karakteristične funkcije može biti karakteristična funkcija? Obrazložiti odgovor.

(b) Pokazati da je $h(t) = e^{2it} \cos \frac{t}{2}$ karakteristična funkcija neke slučajne promenljive X i odrediti $E(X)$.

Rešenje.

(a) Neka su X i Y dve slučajne promenljive sa karakterističnim funkcijama f_X i f_Y. Pretpostavimo da je $f_X + f_Y$ takođe karakteristična funkcija. Tada mora da važi $(f_X + f_Y)(0) = 1$. Sa druge strane, $f_X(0) + f_Y(0) = 1 + 1 = 2$. Dakle, zbir dve karakteristične funkcije ne može biti karakteristična funkcija.

(b) Primetimo da je

$$h(t) = \frac{e^{2it}}{2}(e^{\frac{it}{2}} + e^{\frac{-it}{2}}) = \frac{1}{2} e^{\frac{5it}{2}} + \frac{1}{2} e^{\frac{3it}{2}}.$$

Dakle, h je karakteristična funkcija za slučajnu promenljivu čija raspodela je data sa $P(X = \frac{5}{2}) = P(X = \frac{3}{2}) = \frac{1}{2}$.

4. Neka $X_n : \mathcal{U}(n, n^2)$ raspodelu, $n = 1, 2, \ldots$. Ispitati konvergenciju niza $Y_n = e^{-n} X_n$ u srednje kvadratnom i u verovatnoći.

Rešenje. Primetimo da je $E(Y_n^2) = e^{-2n} E(Y_n^2) = e^{-2n} \displaystyle\int_n^{n^2} x^2 \frac{1}{n^2 - n} dx = e^{-2n} \frac{n^2 + n^3 + n^4}{3}$.
Dakle, $\lim_{n \to \infty} E(Y_n^2) = 0$, što implicira da $Y_n \to 0$ u srednje kvadratnom, pa i u verovatnoći.

5. Pošiljka od 100 sanduka jabuka se smatra ispravnom ako u celoj pošiljci ima najviše 120 jabuka koje nisu jestive. Broj nejestivih jabuka po sanduku je slučajna promenljiva sa Poasonovom $\mathcal{P}(1)$ raspodelom. Kolika je verovatnoća da pošiljka bude ispravna?

Rešenje. Neka je X_k - broj nejestivih jabuka u $k-$tom sanduku, odnosno $X_k : \mathcal{P}(1)$, $k = 1, \ldots, 100$ su međusobno nezavisne slučajne promenljive. Tada je $Y_{100} = \sum_{k=1}^{100} X_k$ ukupan broj nejestivih jabuka u 100 sanduka. Treba odrediti $P(Y_{100} \leq 120)$, pri čemu $Y_{100} : \mathcal{P}(100)$ raspodelu. Prema centralnoj graničnoj teoremi dobijamo

$$P(Y_{100} \leq 120) = P(Y_{100}^{*} \leq 2) = 0,97725$$