Verovatnoća – pismeni ispit (svi smerovi)
7. jun 2018.

1. Putanja čestice je opisana jednačinom $x = Y + ct$, pri čemu je sa c data brzina čestice. Dve čestice će se sudariti ako ona sa leve strane ima brzinu veću od one sa desne strane. Slučajno se biraju dve čestice. Čestica koja prilazi sa leve strane se kreće brzinom iz intervala (a, b), dok se čestica koja prilazi sa desne strane kreće brzinom iz intervala (c, d), gde $0 < a < c < b < d$. Odrediti verovatnoću da će se dve čestice sudariti.
Rešenje: Neka su sa X i Y označene slučajne promenljive koje predstavljaju brzinu leve i desne čestice. Skup svih mogućih ishoda Ω je

$$\Omega = \{(x, y) |\, a < x < b,\, c < y < d\}.$$

Skup svih povoljnih ishoda je

$$A = \{(x, y) \in \Omega \,|\, x > y\}.$$

Imamo

$$P\{X > Y\} = \frac{m(A)}{m(\Omega)},$$

gde $m(\Omega) = (d - c)(b - a)$ i $m(A) = \frac{1}{2}(b - c)^2$.

2. Pritiskom na taster generiše se slučajan broj X iz intervala $(1, 4)$. Broj koji se pojavi na ekranu je dat sa $Y = (X - 2)^2 + 1$. Odrediti funkciju gustine slučajne promenljive Y, kao i verovatnoću da se na ekranu pojavio broj manji od 3.
Rešenje: Dato je

$$X : \mathcal{U}(1, 4), \quad Y = (X - 2)^2 + 1.$$

Dalje, imamo

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x \in (1, 4), \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

(a) Ako $y \notin (1, 5)$, važi $\varphi_Y(y) = 0$.

(b) Ako $y \in (1, 2)$ nemamo obostrano jednoznačno preslikavanje, pa funkciju gustine računamo preko

$$\varphi_Y(y) = \varphi_x(g_1(y))|J_1| + \varphi_x(g_2(y))|J_2|,$$

gde

$$g_1(y) = 2 - \sqrt{y - 1}, \quad g_2(y) = 2 + \sqrt{y - 1}, \quad |J_1| = |J_2| = \frac{1}{2\sqrt{y - 1}}.$$

Dakle, $\varphi_Y(y) = \frac{1}{3\sqrt{y-1}}$.

(c) Ako $y \in (2, 5)$ imamo obostrano jednoznačno preslikavanje, pa je funkcija gustine data sa

$$\varphi_Y(y) = \varphi_x(g(y))|J|, \quad g(y) = 2 + \sqrt{y - 1}, \quad |J| = \frac{1}{2\sqrt{y - 1}}.$$

Sada imamo, $\varphi_Y(y) = \frac{1}{6\sqrt{y-1}}$.

Konačno,

$$\varphi_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \notin (1,5) \\ \frac{1}{3\sqrt{y-1}}, & y \in (1,2] \\ \frac{1}{6\sqrt{y-1}}, & y \in (2,5) \end{cases}.$$

Dalje,

$$P\{Y < 3\} = \int_1^2 \frac{1}{3\sqrt{y-1}}\, dy + \int_2^5 \frac{1}{6\sqrt{y-1}}\, dy = \frac{1}{3}(1+\sqrt{2}).$$

3. Verovatnoća da će osoba koja prođe pored supermarketa ući u njega je 0.5, a verovatnoća da će osoba koja uđe u supermarket nešto kupiti je 0.8. U tom slučaju, potrošena suma novca (u dinarima) je slučajna promenljva X data sa

$$X : \begin{pmatrix} 500 & 1000 & 2000 & 5000 & 10000 \\ 1/10 & 1/5 & 2/5 & 1/5 & 1/10 \end{pmatrix}.$$

Vreme (u satima) koje osoba koja je ušla u supermarket provede u njemu je slučajna promenljiva $T : \mathcal{E}(4)$. Slučajno se bira osoba koja prolazi pored supermarketa.

(a) Koja je očekivana suma novca koju će ta osoba potrošiti?

(b) Odrediti očekivano vreme koje je ta osoba provela u supermarketu.

Rešenje: Označimo događaje

- A – osoba je ušla u supermarket,
- B – osoba je nešto kupila u supermarketu,

i slučajne promenljive

- Y je potrošena suma novca,
- V je vreme provedeno u supermarketu.

Dato je

$$P(A) = 0.5, \quad P(B|A) = 0.8,$$

pa važi $P(B) = P(B|A)P(A) = 0.8 \cdot 0.5 = 0.4$.

(a) $E(Y) = E(Y|\bar{B})P(\bar{B}) + E(Y|B)P(B) = 0 + E(X)P(B) = 3050 \cdot 0.4 = 1220.$

(b) $E(V) = E(V|A)P(A) + E(V|\bar{A})P(\bar{A}) = E(T)P(A) + 0 = \frac{1}{4} \cdot 0.5 = \frac{1}{8}h.$

4. Date su slučajne promenljive $X_n : \mathcal{U}(0, \frac{2}{n})$ i

$$Y_n : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1-\frac{2}{n} & \frac{2}{n} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

X_n i Y_n su nezavisne za svako $n \in \mathbb{N}$. Ispitati sve četiri vrste konvergencije niza $Z_n = X_n Y_n$.
Rešenje: Imamo

$$E(X_n) = \frac{1}{n}, \quad D(X_n) = \frac{1}{3n^2}, \quad E(X_n^2) = \frac{4}{3n^2}$$

i

$$E(Y_n) = 1 + \frac{2}{n}, \quad E(Y_n^2) = 1 + \frac{6}{n}.$$

Ispitujemo četiri vrste konvergencija niza Z_n ka $Z = 0$, kada $n \to \infty$.

Srednje kvadratna konvergencija. Iz nezavisnosti sledi

$$E(Z_n^2) = E(X_n^2)E(Y_n^2) = \frac{4}{3n^2}\Big(1 + \frac{6}{n}\Big) \to 0,\ n \to \infty$$

pa zaključujemo da niz Z_n konvergira srednje kvadratno ka $Z = 0$, kada $n \to \infty$.

Skoro sigurna konvergencija. Fiksiramo $\varepsilon > 0$ i posmatramo događaje $A_n^{(\varepsilon)} = \{|Z_n| \geq \varepsilon\}$. Koristeći nejednakost Čebiševa dolazimo do

$$P(A_n^{(\varepsilon)}) = P\{|Z_n| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E(Z_n^2)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{4}{3n^2}\Big(1 + \frac{6}{n}\Big).$$

Sada,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^{(\varepsilon)}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{4}{3n^2}\Big(1 + \frac{6}{n}\Big) \leq \frac{7}{\varepsilon^2}\frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty.$$

Koristeći uporedni kriterijum i Borel-Kantelijevu lemu 1 zaključujemo da je verovatnoća da se realizuje najviše konačno mnogo događaja $A_n^{(\varepsilon)}$ jednaka 1, pa sledi da niz slučajnih promenljivih Z_n konvergira skoro sigurno ka $Z = 0$ kada $n \to \infty$.

Konvergencija u verovatnoći i u raspodeli sledi iz skoro sigurne konvergencije (ili srednje kvadratne).

5. Autobusi sa gradske autobuske linije 15 ukupno 40 puta u toku jednog dana kupe putnike na stanici broj 5. Broj putnika koji uđu u autobus broj 15 na stanici broj 5 je slučajna promenljiva Y

$$Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/12 & 1/3 & 1/3 & 1/6 & 1/12 \end{pmatrix}.$$

Broj putnika koji uđu u autobus je nezavisan od vremena i dana ulaska. Odrediti verovatnoću da je ukupan broj putnika koje autobusi sa linije 15 pokupe na stanici broj 5 u toku 100 dana manji od 7500.

Rešenje: U toku 100 dana autobusi će stati na stanicu 5 ukupno $n = 4000$ puta. Neka je sa Y_i označena slučajna promenljiva koja predstavlja broj putnika koji su usli na $i-$tom po redu stajanju. Imamo $Y_i = Y$, za svako $i = 1, \ldots, 4000$. Ukupan broj putnika koji uđu u toku tih 100 dana je slučajna promenljiva

$$S_{4000} = \sum_{i=1}^{4000} Y_i.$$

Kako je $E(Y) = \frac{11}{6}$ i $D(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \frac{9}{2} - \frac{121}{36} = \frac{41}{36}$, iz nezavisnosti sledi

$$E(S_{4000}) = 4000 \cdot \frac{11}{6}, \quad D(S_{4000}) = 4000 \cdot \frac{41}{36}.$$

Tražimo $P\{S_{4000} < 7500\}$. Zadovoljeni su uslovi Centralne granične teoreme pa imamo

$$\begin{aligned} P\{S_{4000} < 7500\} &= P\left\{S_{4000}^* < \frac{7500 - 4000 \cdot \frac{11}{6}}{\sqrt{4000 \cdot \frac{41}{36}}}\right\} = P\left\{S_{4000}^* < \frac{\frac{1000}{6}}{\frac{20}{6}\sqrt{410}}\right\} \\ &= P\left\{S_{4000}^* < \frac{50}{\sqrt{410}}\right\} = P\left\{S_{4000}^* < 2.469\right\} = 0.5 + \Phi(2.469) \\ &= 0.5 + 0.49 = 0.99. \end{aligned}$$