1 Stohastička integracija, Itova formula, SDJ

1.1 Itov stohastički integral

Lema 1.1.1. *Neka je* $[a,b]$ *interval iz* $[0,+\infty)$ *i neka su* $\mathcal{P}^n := \{a = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{m_n}^n = b\}$ *particije intervala* $[a,b]$, *pri čemu* $|\mathcal{P}^n| \to 0$ *kada* $n \to \infty$. *Uvedimo oznaku*

$$Q_n := \sum_{k=0}^{m_n-1} \big(W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)\big)^2.$$

Tada važi

$$s.k. - \lim_{n\to\infty} Q_n = b - a.$$

Teorema 1.1.1. *Neka* $\mathcal{P}^n$, $n \in \mathcal{N}$, *predstavlja particiju intervala* $[0,T]$ *i neka je* $\lambda \in [0,1]$ *fiksiran broj. Uvedimo oznaku*

$$R_n := \sum_{k=0}^{m_n-1} W(\tau_k^n)\big(W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)\big).$$

Tada je

$$s.k. - \lim_{n\to\infty} R_n = \frac{W^2(T)}{2} + \big(\lambda - \tfrac{1}{2}\big)T, \text{ tj.}$$

$$E\Big[\Big(R_n - \frac{W^(T)}{2} - \big(\lambda - \tfrac{1}{2}\big)T\Big)^2\Big] \to 0, \text{ kada } n \to \infty.$$

1.2 Itova formula

1. Neka je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deterministička neprekidna funkcija i $g \in L^2[t_0, T]$, tj. $\int_{t_0}^{T} |g(t)^2|\, dt < \infty$. Pokazati da je sa
$$Y_t = ce^{-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} g^2(s)\, ds + \int_{t_0}^{t} g(s)\, dW_s}$$
definisano rešenje stohastičke diferencijalne jednačine
$$dY_t = g(t)Y_t\, dW_t, \qquad Y_{t_0} = c = \text{const.}$$

2. Neka su $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ determinističke neprekidne funkcije i $f \in L^1[t_0, T]$, $g \in L^2[t_0, T]$. Pokazati da je sa
$$Y_t = ce^{\int_{t_0}^{t} f(s)\, ds - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} g^2(s)\, ds + \int_{t_0}^{t} g(s)\, dW_s}$$
dato jedinstveno rešenje stohastičke diferencijalne jednačine
$$dY_t = f(t)Y_t\, dt + g(t)Y_t\, dW_t, \qquad Y_{t_0} = c = \text{const.}$$

3. Označimo sa P_t cenu akcije u trenutku t, $t \in [0, T]$ (P_t je slučajna promenljiva). Pretpostavimo da relativna promena cene $\frac{dP_t}{P_t}$ zadovoljava sledeću SDJ
$$\frac{dP_t}{P_t} = \mu\, dt + \sigma\, dW_t,$$
pri čemu znamo da početna cena akcije u trenutku $t = 0$ iznosi P_0, $P_0 > 0$. Rešiti datu jednačinu ako su $\mu > 0$ i σ konstante ($\mu-$ drift, $\sigma-$ volatilnost).

4. Neka je $(W_t)_{t\geq 0}$ standardno Braunovo kretanje. Dat je proces
$$M_t = (W_t^2 - t)^2 - 4\int_0^t W_s^2 ds.$$
Odrediti dMt. Izraziti M_t kao stohastički integral.

5. Dat je stohastički proces $X_t = t + W_t$, pri čemu je sa W_t označeno standardno Braunovo kretanje. Odrediti $dY_t \cdot dZ_t$ ako su procesi Y_t i Z_t dati sa
$$Y_t = X_t^2, \qquad \text{i} \qquad Z_t = tX_t.$$

Za vežbu

1. (a) Izračunati stohastički diferencijal $d(W_t^{3/2})$.
   (b) Zapisati stohastički integral $\int_0^T W_t^{1/2} dW_t$ u obliku u kom se ne pojavljuju stohastički integrali.

1.3 Stohastičke diferencijalne jednačine

Teorema 1.3.1. *Posmatramo linearnu SDJ oblika*

$$dX_t = \big(A(t)X_t + a(t)\big)\,dt + \big(B(t)X_t + b(t)\big)\,dW_t, \qquad X_{t_0} = C.$$

$A(t)$, $a(t)$, $B(t)$ i $b(t)$ su determinističke funkcije, a C je slučajna promenljiva (ne mora biti konstanta). Ako je $E[|C|^2] < \infty$, tada postoji $m(t) = E[X_t]$ (X_t je jedinstveno rešenje SDJ) i predstavlja rešenje ODJ

$$m'(t) = A(t)m(t) + a(t), \qquad m(t_0) = E[C].$$

Teorema 1.3.2. *Rešenje SDJ*

$$dX_t = \big(AX_t + a(t)\big)\,dt + b(t)\,dW_t, \qquad X_{t_0} = C$$

dato je sa

$$X_t = Ce^{A(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}a(s)\,ds + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}b(s)\,dW_s.$$

Teorema 1.3.3. *Ako je $g(t)$ realna, deterministička funkcija iz $L^2[t_0, T]$, tada*

$$\int_{t_0}^{t} g(s)\,dW_s : \mathcal{N}\big(0, \int_{t_0}^{t} g^2(s)\,ds\big).$$

1. Kada posmatramo Braunovo kretanje čestice pod uticajem sile trenja (i nijedne druge) dobijamo Langevinovu jednačinu

   $$dX_t = -\alpha X_t\,dt + \sigma\,dW_t, \qquad X_0 = C,$$

   gde su $\alpha > 0$ i σ konstante i važi $E[|C|^2] < \infty$. Proces X_t, koji je rešenje date jednačine, predstavlja brzinu čestice u trenutku t.

   (a) Odrediti X_t.

   (b) Odrediti $E[X_t]$.

   (c) Odrediti $D[X_t]$.

   (d) Ako je C normalna slučajna promenljiva ili konstanta odrediti raspodelu za X_t kada $t \to \infty$.

2. Neka je X_t proces (rešenje SDJ iz prethodnog zadatka) koji predstavlja brzinu čestice. Neka je Y_t proces koji zadovoljava SDJ

   $$dY_t = X_t\,dt, \qquad Y(0) = Y_0.$$

   Odrediti $E[Y_t]$.

3. Neka je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deterministička, neprekidna funkcija takva da $g \in L^2[t_0, T]$. Rešiti SDJ

   $$dY_t = g(t)Y_t\,dW_t, \qquad Y_{t_0} = c = \text{const}.$$