

Martingali

Definicija 1. Niz σ -algebri $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ na Ω za koje važi $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset \mathcal{F}_n \subset \dots$ naziva se filtracija.

Definicija 2. Niz slučajnih promenljivih ξ_1, ξ_2, \dots na (Ω, \mathcal{F}, P) naziva se diskretni martingal u odnosu na filtraciju $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ ako važi:

1. ξ_n je integrabilna $\forall n = 1, 2, \dots$ tj. $\int_{\Omega} |\xi_n| dP < \infty$.
2. ξ_1, ξ_2, \dots je adaptiran u odnosu na filtraciju $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ (ξ_i je merljiva u odnosu na \mathcal{F}_i , $\forall i \in \mathbb{N}$).
3. $E[\xi_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \xi_n$ s.s. $n = 1, 2, \dots$

Definicija 3. Neka je $T \subset \mathbb{R}$. familija σ -algebri $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ je filtracija ako je $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, $\forall s, t \in T$, $s \leq t$.

Definicija 4. Neka je $T \in \mathbb{R}$. Stohastički proces $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$ je martingal u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ ako

1. $\xi(t)$ je integrabilna $\forall t \in T$ (tj. $E[|\xi(t)|] < \infty$).
2. $\xi(t)$ je \mathcal{F}_t -merljivo $\forall t \in T$ (tj. $\xi(t)$ je adaptiran u odnosu na \mathcal{F}_t).
3. $E[\xi(t) | \mathcal{F}_s] = \xi(s)$ s.s. $\forall s \leq t$.

Teorema 1 (Levijeva karakterizacija Braunovog kretanja pomoću integrala). Neka je $\{X_t, t \geq 0\}$ stohastički proces i neka je $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}(X_s, 0 \leq s \leq t)$ istorija procesa X_t do trenutka t (uključujući t). Proces $\{X_t, t \geq 0\}$ je Braunovo kretanje ako i samo ako

1. $X_0 = 0$,
 2. X_t ima neprekidne trajektorije,
 3. X_t je martingal,
 4. $X_t^2 - t$ je martingal.
1. Dat je niz nenegativnih, nezavisnih slučajnih promenljivih X_1, X_2, \dots na (Ω, \mathcal{F}, P) sa očekivanjem $E(X_i) = 1$, za sve $i \in \mathbb{N}$. Neka je $M_0 := 1$ i

$$M_n := \prod_{i=1}^n X_i = X_1 \cdot \dots \cdot X_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Izračunati $E[|M_n|]$, $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Definisati filtraciju $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ takvu da je M_n \mathcal{F}_n -merljiva.
- (c) Pokazati da je niz $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ diskretni martingal u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ definisanu pod (b).

2. Neka je $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa istim zakonom raspodele

$$X_n : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Definišimo $S_n := X_1 + \dots + X_n$, $\xi_n := S_n^2 - n$, $n \in \mathbb{N}$. Dokazati da je $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ martingal u odnosu na filtraciju $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}\{X_1, \dots, X_n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Pokazati da je $e^{W_t - \frac{t}{2}}$ martingal u odnosu na filtraciju $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}\{W_s, 0 \leq s \leq t\}$ (istorija Braunovog kretanja do trenutka t). (Ovaj martingal se naziva eksponencijalni martingal.)
4. Neka je $c > 0$. Ako je W_t Vinerov proces, pokazati da je $V(t) := \frac{1}{c}W(c^2t)$ takođe Vinerov proces.