Verovatnoća – pismeni ispit i rešenja (svi smerovi)
25. januar 2018.

1. Rastojanje tačke (x, y) u ravni od koordinatnog početka $(0, 0)$ definisano je sa $d(x, y) = |x| + |y|$. Na slučajan način biramo tačku u oblasti $\{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$. Odrediti verovatnoću da je rastojanje ovako izabrane tačke od $(0, 0)$ ne veće od a, gde je $a \in (0, 2)$.

Rešenje: Jasno je da je $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$. Posmatramo oblast $A = \{(x, y) \in \Omega : x + y \leq a\}$. Tada je $p = m(A)/m(\Omega) = m(A)$. Ako je $0 < a \leq 1$, onda je $m(A) = \frac{1}{2}a^2$, ako je $1 < a < 2$, onda je $m(A) = 1 - \frac{1}{2}(2 - a)^2$.

2. Zajednička funkcija raspodele slučajnih promenljivih X i Y, koje predstavljaju vek trajanja dve povezane komponente u mašini data je sa

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \frac{e^{-2}}{x!(y - x)!}, \quad x = 0, 1, \ldots, \quad y = x, x + 1, \ldots$$

(a) Odrediti funkcije raspodele za slučajne promenljive X i Y.

(b) Odrediti zajedničku funkciju raspodele za X i $Y - X$? Da li su X i $Y - X$ nezavisne?

Rešenje: $P(X = x) = \sum_{y=x}^{\infty} \frac{e^{-2}}{x!(y-x)!} = \frac{e^{-2}}{x!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{e^{-1}}{x!}, x = 0, 1, \ldots$

$$P(Y = y) = \sum_{x=0}^{y} \frac{e^{-2}}{x!(y - x)!}, y = 0, 1, \ldots$$

Dalje je

$$P(X = x, Y - X = z) = P(X = x, Y = z + x) = \frac{e^{-2}}{x!z!}, \ x, z = 0, 1, \ldots$$

Zatim je

$$P(Y - X = z) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-2}}{x!z!} = \frac{e^{-1}}{z!}.$$

Dakle,

$$P(X = x, Y - X = z) = P(X = x)P(Y - X = z),$$

odnosno X i $Y - X$ su nezavisne.

3. Pretpostavimo da bračni par posle n godina braka može da ima najviše n dece. Neka slučajna promenljiva X predstavlja broj dece posle tačno 3 godine braka,

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Ako je Y broj ženske dece posle tačno 3 godine braka, odrediti $E(Y)$, $D(Y)$ i $P\{Y \geq X - 1 | X \geq 2\}$.

Rešenje: Primetimo da $Y \leq X$ i $R_Y = \{0,1,2,3\}$. Koristićemo

$$p_{i,j} = P\{X=i, Y=j\} = P\{X=i\}P\{Y=j|X=i\}.$$

Pa imamo,

$$p_{0,0} = \frac{1}{6}\cdot 1 = \frac{1}{6}, \quad p_{0,1} = p_{0,2} = p_{0,3} = 0,$$
$$p_{1,0} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6} = p_{1,1}, \quad p_{1,2} = p_{1,3} = 0,$$
$$p_{2,0} = p_{2,2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{12}, \quad p_{2,1} = \frac{1}{3}\cdot 2\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{6}, \quad p_{2,3} = 0,$$
$$p_{3,0} = p_{33} = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{48}, \quad p_{3,1} = p_{3,2} = \frac{1}{6}\cdot 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{48}.$$

$X \setminus Y$	0	1	2	3	$\sum$
0	8/48	0	0	0	1/6
1	8/48	8/48	0	0	1/3
2	4/48	8/48	4/48	0	1/3
3	1/48	3/48	3/48	1/48	1/6
$\sum$	21/48	19/48	7/48	1/48	1

Dakle,

$$Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 21/48 & 19/48 & 7/48 & 1/48 \end{pmatrix}, \quad Y^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 21/48 & 19/48 & 7/48 & 1/48 \end{pmatrix},$$

pa sledi

$$E(Y) = \frac{3}{4} \quad \text{i} \quad E(Y^2) = \frac{7}{6}.$$

Konačno,

$$D(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \frac{7}{6} - \frac{9}{16} = \frac{29}{48}.$$

Dalje,

$$P\{Y \geq X-1 | X \geq 2\} = \frac{P\{Y \geq X-1, X \geq 2\}}{P\{X \geq 2\}},$$
$$P\{X \geq 2\} = P\{X=2\} + P\{X=3\} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2},$$
$$P\{Y \geq X-1, X \geq 2\} = p_{2,1} + p_{2,2} + p_{2,3} + p_{3,2} + p_{3,3} = \frac{8+4+3+1}{48} = \frac{1}{3}.$$

Sledi,

$$P\{Y \geq X-1 | X \geq 2\} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$

4. Dat je niz nezavisnih slučajnih promenljivih $(X_n)_n$. Funkcija raspodele slučajne promenljive X_n, $n \in \mathbb{N}$, je data sa

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 5 - \frac{1}{2n}, \\ nx - 5n + 0.5, & 5 - \frac{1}{2n} < x \leq 5 + \frac{1}{2n}, \\ 1, & x > 5 + \frac{1}{2n}. \end{cases}$$

(a) Odrediti karakterističnu funkciju slučajne promenljive X_n, $f_{X_n}(t)$, kao i $\lim_{n\to\infty} f_{X_n}(t)$.

(b) Ispitati konvergenciju u raspodeli niza $(X_n)_n$.

(c) Da li iz rezultata pod (b) možemo nešto da zaključimo o konvergenciji u verovatnoći niza $(X_n)_n$? Objasniti.

Rešenje:

(a) Kako bismo izračunali $f_{X_n}(t)$ treba nam funkcija gustine

$$\varphi_{X_n}(x) = \begin{cases} n, & x \in \left(5 - \frac{1}{2n}, 5 + \frac{1}{2n}\right), \\ 0, & x \notin \left(5 - \frac{1}{2n}, 5 + \frac{1}{2n}\right). \end{cases}$$

Dalje,

$$f_{X_n}(t) = E(e^{itX_n}) = \int_{5-\frac{1}{2n}}^{5+\frac{1}{2n}} e^{itx} n\, dx = \frac{n}{it}\left(e^{it(5+\frac{1}{2n})} - e^{it(5-\frac{1}{2n})}\right) = \frac{n}{it} e^{5it}\left(e^{\frac{it}{2n}} - e^{-\frac{it}{2n}}\right)$$
$$= \frac{1}{2} e^{5it}\left(\frac{e^{\frac{it}{2n}} - 1}{\frac{it}{2n}} + \frac{e^{-\frac{it}{2n}} - 1}{-\frac{it}{2n}}\right).$$

Tada

$$\lim_{n\to\infty} f_{X_n}(t) = \frac{1}{2} e^{5it} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{\frac{it}{2n}} - 1}{\frac{it}{2n}} + \frac{e^{-\frac{it}{2n}} - 1}{-\frac{it}{2n}}\right) = \frac{1}{2} e^{5it}(1+1) = e^{5it},$$

što je karakteristična funkcija za slučajnu promenljivu $X = 5$.

(b) Konvergenciju u verovatnoći možemo ispitati na dva načina. Prvi način je da iskoristimo rezultat pod (a). Kako $f_{X_n}(t) \to f_X(t)$, kada $n \to \infty$ $(X = 5)$ i funkcija $f_X(t) = e^{5it}$ je neprekidna u $t = 0$, iz Obrnute teoreme sledi da niz $F_{X_n}(x)$ kompletno konvergira ka funkciji $F_X(x)$, kada $n \to \infty$, koja je funkcija raspodele za $X = 5$. Sledi da X_n konvergira u raspodeli ka $X = 5$, kada $n \to \infty$. Drugi način je da direktno pokažemo kompletnu konvergenciju niza funkcija raspodela F_{X_n} ka F_X, kada $n \to \infty$. Imamo

$$F_{X_n}(x) \to \begin{cases} 0, & x < 5 \\ 1/2, & x = 5 \\ 1, & x > 5 \end{cases} =: \tilde{F}(x),\ n \to \infty.$$

Primetimo da $\tilde{F}(x)$ nije funkcija raspodele neke slučajne promenljive, jer nije neprekidna sa leve strane. Međutim,

$$\tilde{F}(x) = F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 5, \\ 1, & x > 5 \end{cases}, \qquad x \ne 5.$$

Kako $F_X(x)$ nije neprekidna u $x = 5$, sledi da F_{X_n} konvergira ka $F_X(x)$ u svi tačkama u kojima je $F_X(x)$ neprekidna, tj. F_{X_n} kompletno konvergira ka F_X kada $n \to \infty$ pa sledi konvergencija u raspodeli.

(c) Kako niz slučajnih promenljivih (X_n) konvergira u raspodeli kad slučajnoj promenljivoj $X = c = 5$ (koja je konstantna) iz konvergencije u raspodeli sledi konvergencija u verovatnoći ka $X = 5$, kada $n \to \infty$.

5. Gajgerov brojač je uređaj koji beleži radioaktivne čestice emitovane od strane izvora. Neka se broj emitovanih radioaktivnih čestica u toku jednog minuta ponaša u skladu sa Poasonovom raspodelom sa parametrom 10. Broj emitovanih radioaktivnih čestica u svakom minutu je nezavisan. Odrediti verovatnoću da Gajgerov brojač zabeleži više od 14 640 radioaktivnih čestica u toku jednog dana? Pretpostavljamo da će Gajgerov brojač zabeležiti sve emitovane radioaktivne čestice.

Rešenje: Neka je X_i broj emitovanih radioktivnih čestica u jednoj minuti. Znamo $X_i : \mathcal{P}(10)$. Jedan dan ima 1440 minuta. Neka je sa S_{1440} obeležen broj emitovanih radioktivnih čestica u toku jednog dana. Imamo

$$E(S_{1440}) = 1440 \cdot 10 = 14\,400, \quad D(S_{1440}) = 1440 \cdot 10 = 14\,400$$

Koristimo Centralnu graničnu teoremu

$$\begin{aligned} P\{S_{1440} > 14640\} &= P\Big\{S^*_{1440} > \frac{14640 - 14400}{\sqrt{14400}}\Big\} = P\Big\{S^*_{1440} > \frac{14640 - 14400}{\sqrt{14400}}\Big\} \\ &= P\Big\{S^*_{1440} > \frac{240}{120}\Big\} \approx \Phi(\infty) - \Phi(2) = 0.5 - 0.47725 = 0.02275. \end{aligned}$$

Možda korisno:

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1.$
- Ako $X : \mathcal{P}(\lambda)$ onda $E(X) = D(X) = \lambda.$