Verovatnoća – pismeni ispit (svi smerovi)
16. april 2018.

1. Milan i Uroš bacaju kockicu za jamb, nezavisno jedan od drugog. Ako je suma 5, 6 ili 7, Milan pobeđuje. U suprotnom, Uroš pobeđuje.

(a) Odrediti verovatnoću da Milan pobedi.

(b) Odrediti verovatnoću da je Milan bacio broj 3, ako se zna da je on pobedio.

Rešenje:

(a) Označimo sa A događaj da je Milan pobedio. Neka je Ω skup svih mogućih događaja. Tada $|\Omega| = 36$. Neka je $A = \Omega_5 + \Omega_6 + \Omega_7$, gde

$$\Omega_5 = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\},\ \Omega_6 = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\},$$

$$\Omega_7 = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}.$$

Sledi $|A| = 4 + 5 + 6 = 15$, pa

$$P(A) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$$

(b) Neka je D događaj da je Milan bacio broj 3. Sledi $P(D) = 1/6$. Treba da nađemo $P(D|A)$. Važi

$$P(D|A) = \frac{P(DA)}{P(A)} = \frac{P(D)P(A|D)}{P(A)}.$$

Kako je

$$P(A|D) = P(\text{Uroš je bacio 2, 3 ili 4}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

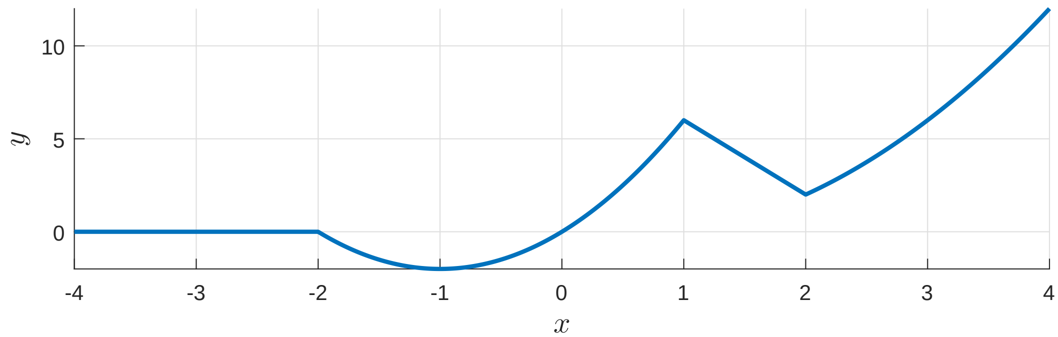
Dakle,

$$P(D|A) = \frac{\frac{1}{6}\frac{1}{2}}{\frac{5}{12}} = \frac{1}{5}.$$

2. Slučajna promenljiva X ima funkciju gustine $\varphi_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x-2|}$, $x \in \mathbb{R}$. Pronaći funkciju raspodele slučajne promenljive

$$Y = \begin{cases} 0, & X \leq -2, \\ 2X(X+2), & X \in (-2,1], \\ -4X+10, & X \in (1,2], \\ X(X-1), & X > 2. \end{cases}$$

Rešenje:



(a) Ako $y \leq 2$ onda
$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = 0.$$

(b) Ako $y \in (-2, 0]$ onda
$$F_Y(y) = P\Big\{ -1 - \frac{1}{2}\sqrt{4+2y} < X < -1 + \frac{1}{2}\sqrt{4+2y}\Big\} = \frac{1}{2}\Big(e^{-3+\frac{1}{2}\sqrt{4+2y}} - e^{-3-\frac{1}{2}\sqrt{4+2y}}\Big).$$

(c) Ako $y \in (0, 2]$ onda
$$F_Y(y) = P\Big\{X < -1 + \frac{1}{2}\sqrt{4+2y}\Big\} = \frac{1}{2}e^{-3+\frac{1}{2}\sqrt{4+2y}}.$$

(d) Ako $y \in (2, 6]$ onda
$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\Big\{X < -1 + \frac{1}{2}\sqrt{4+2y}\Big\} + P\Big\{\frac{10-y}{4} < X < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4y}\Big\} \\ &= \frac{1}{2}e^{-3+\frac{1}{2}\sqrt{4+2y}} + \frac{1}{2}\Big(1 - e^{\frac{10-y}{4}-2}\Big) - \frac{1}{2}\Big(e^{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{1+4y}}{2}} - 1\Big) \end{aligned}.$$

(e) Ako $y > 6$ onda
$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\Big\{X < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4y}\Big\} = \int_{-\infty}^{2} \frac{1}{2}e^{x-2}\,dx + \int_{2}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4y}} \frac{1}{2}e^{-x+2}\,dx \\ &= 1 - \frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+4y}} \end{aligned}.$$

3. Odrediti konstantu c za koju je funkcija
$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ c, & x \in (-2, -1], \\ 0, & x \in (-1, 0]. \\ 2ce^{-2x}, & x > 0, \end{cases}$$
funkcija gustine neke slučajne promenljive X. Za tako dobijeno c, odrediti karakteristične funkcije slučajnih promenljivih X i $Y = 2X + 4$.

Rešenje: Funkcija $\varphi(x)$ je nenegativna za $c \geq 0$. Za $c = 0$ to svakako nije funkcija gustine, jer u tom slučaju $\varphi(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Dalje,

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = \int_{-2}^{-1} cdx + \int_{0}^{\infty} 2ce^{-2x}dx = 2c,$$

pa dobijamo $c = 1/2$. Dakle, X je slučajna promenljiva sa gustinom

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ \frac{1}{2}, & x \in (-2,-1], \\ 0, & x \in (-1,0]. \\ e^{-2x}, & x > 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_X(t) &= E(e^{itx}) = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{2} e^{itx}dx + \int_0^{\infty} e^{itx}e^{-2x}dx = \frac{1}{2it}(e^{-it} - e^{-2it}) + \int_0^{\infty} e^{x(it-2)}\,dx \\ &= \frac{1}{2it}(e^{-it} - e^{-2it}) + \frac{1}{2-it}, \\ f_Y(t) &= f_{2X+4}(t) = e^{4it}f_X(2t) = e^{4it}\Big(\frac{1}{4it}(e^{-2it} - e^{-4it}) + \frac{1}{2-2it}\Big) \\ &= \frac{1}{4it}(e^{2it} - 1) + \frac{1}{2(1-it)}e^{4it}. \end{aligned}$$

4. Niz slučajnih promenljivih $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takvih da $E(Y_n^2) = 1$, za svako $n \in \mathbb{N}$, konvergira srednje kvadratno, kada $n \to \infty$, ka slučajnoj promenljivoj Y, za koju važi $E(Y) = 0$. Dokazati da

$$Y \neq \text{const.}$$

Rešenje: Iz srednje kvadratne konvergencije sledi

$$E(Y_n^2) < \infty, \qquad E\big((Y_n - Y)^2\big) \to 0,\, n \to \infty.$$

Kako je $E(Y_n^2) = 1 \nrightarrow 0$, $n \to \infty$, sledi da $Y \neq 0$ (kada bi bilo $Y = 0$, drugi uslov ne bi važio). Pretpostavimo da $Y = c \neq 0$. Tada $E(Y) = c$, a iz uslova zadatka imamo $E(Y) = 0$, iza čega sledi $c = 0$, što je kontradikcija.

5. Verovatnoća da dođe do greške prilikom prenosa digitalnog signala kroz komunikacioni sistem je p. Prenosi signala su nezavisni i signal se šalje svakih p sekundi. Odrediti verovatnoću da je broj netačno prenetih signala u minuti veći od 10. Kolika je ta verovatnoća ako je $p = 0.1$?

Rešenje: Kako jedan minut ima 60 sekundi, ukupan broj prenetih (tačno ili netačno) signala u minuti je $n = [60/p]$ (radi jednostavnijeg zapisa, u nastavku ćemo pisati $n = 60/p$). Označimo sa S_n broj tačno prenetih signala u minuti. Tada

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k,$$

gde

$$X_k : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 1-p \end{pmatrix},$$

a X_k su nezavisne. Tada je broj netačno prenetih signala $n - S_n$. Imamo

$$E(S_n) = nE(X_k) = n(1-p) = \frac{60(1-p)}{p}, \qquad D(S_n) = nD(X_k) = np(1-p) = 60(1-p).$$

Koristeći Moavr-Laplasovu teoremu (ili Centralnu graničnu teoremu) dobijamo

$$\begin{aligned} q = P\{n - S_n > 10\} = P\{S_n < n - 10\} &= P\Big\{S_n^* < \frac{n - 10 - E(S_n)}{\sqrt{D(S_n)}}\Big\} \\ &= P\Big\{S_n^* < \frac{60/p - 10 - n(1-p)}{\sqrt{60(1-p)}}\Big\} \\ &= 0.5 + \Phi\Big(\frac{50}{\sqrt{60(1-p)}}\Big). \end{aligned}$$

Ako je $p = 0.1$ imamo

$$q = 0.5 + \Phi\Big(\frac{50}{\sqrt{60 \cdot 0.9}}\Big) = 0.5 + \Phi\Big(\frac{50}{3\sqrt{6}}\Big) = 1.$$