Uslovno očekivanje – zadaci

1. Neka je $\Omega \neq 0$ dati skup.

   (a) Odrediti najmanju i najveću $\sigma-$algebru na skupu Ω.

   (b) Koliko elemenata imaju $\sigma-$algebre iz (a) ako je skup Ω konačan, a kolika je kardinalnost ako je Ω prebrojiv?

   (c) Neka je $A \subset \Omega$. Odrediti $\mathcal{F}(A)$ (najmanju $\sigma-$algebru na Ω generisanu skupom A). Koliko elemenata ima $\mathcal{F}(A)$?

   (d) Neka je A_i, $i = 1, \ldots, n$ konačna particija skupa Ω, tj.

   $$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega \quad \text{i} \quad A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j.$$

   Pokazati da je $\sigma-$algebra generisana skupovima $A_1, \ldots, A_n$ ista kao i $\sigma-$algebra generisana skupovima $A_{i_1}, \ldots, A_{i_{n-1}}$, tj. $\mathcal{F}(A_1, \ldots, A_n) = \mathcal{F}(A_{i_1}, \ldots, A_{i_{n-1}})$ gde $i_1, \ldots, i_{n-1} \in \{1, \ldots, n\}$ i $i_j \neq i_k$ za $j \neq k$.

2. Baca se kockica i registruje se broj koji padne. Slučajna promenljiva X uzima vrednost 1 ako padne neparan broj, odnosno vrednost 2 ako padne paran broj. Dalje, definišimo događaj

   $$A - \text{ pao je broj veći od 3.}$$

   Odrediti:

   (a) $X|A$;

   (b) $E(X|A)$;

   (c) $E(X|\mathcal{F}(A))$;

   (d) Da li je $E(E(X|\mathcal{F}(A))) = E(X)$?

   (e) Da li je slučajna promenljiva X merljiva u odnosu na $\sigma-$algebru $\mathcal{F}(A)$?

3. Bacaju se tri novčića i registruje se da li je na njima palo pismo (p) ili grb (g). Dati su događaji:

   $$A_1 = \{\text{ppp}, \text{ppg}\},\ A_2 = \{\text{pgp}, \text{pgg}\},\ A_3 = \{\text{gpp}, \text{gpg}\},\ A_4 = \{\text{ggp}, \text{ggg}\}.$$

   Slučajna promenljiva X predstavlja broj pisama koja su pala na data 3 novčića. Odrediti $E(X|\mathcal{F}(A_1, A_2, A_3, A_4))$.

4. Broj X se slučajno bira iz skupa $\{1, 2, 3, 4\}$. Zatim se broj Y bira iz istog skupa, ali tako da je manji ili jednak od prethodno izabranog X. Naći $E(X|Y)$.

5. Verovatnoća da nakon bacanja novčića padne glava je p. Novčić se baca uzastopno sve dok prvi put ne padne glava. Neka je N broj potrebnih bacanja, a A događaj da je prilikom prvog bacanja pala glava. Naći $E(N|\mathcal{F}(A))$ i očekivani broj bacanja novčića.

6. Date su nezavisne slučajne promenljive sa raspodelama

   $$X_k : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix},\ k = 1, \ldots, n.$$

   Neka je $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

(a) Naći raspodelu za S_n.

(b) Naći raspodelu za $S_n|\{X_n = 0\}$ i $S_n|\{X_n = 1\}$.

(c) Naći raspodelu za $X_n|\{S_n = k\}$, $k = 0, \ldots, n$ i $E(X_n|\{S_n = k\})$, $k = 0, \ldots, n$.

(d) Naći $E(X_n|S_n)$.

(e) Pokazati da je $E(E(X_n|S_n)) = E(X_n)$.

7. Pravilan novčić se baca sve dok prvi put ne padne grb. Definišimo događaje:

$$\begin{aligned} A_i &- \text{ grb je prvi put pao u } i-\text{tom bacanju, } i = 1, 2, \ldots, \\ A &- \text{ pao je grb.} \end{aligned}$$

Slučajna promenljiva Y uzima vrednost -1 ako je grb prvi put pao u neparnom bacanju, odnosno 1 ako je grb prvi put pao u parnom bacanju. Odrediti:

(a) Funkciju raspodele za slučajnu promenljivu Y i skicirati njen grafik.

(b) $E(Y)$

(c) $E(Y|A_{2n})$, $E(Y|A_{2n-1})$, $n \in \mathbb{N}$

(d) $E(Y|\mathcal{F}(A_1, \ldots, A_n, \ldots))$.

8. Sistem svakog dana sakuplja određenu količinu podataka i sabira novac zarađen tog dana. Zatim program klasifikuje prethodni dan u kategoriju. Svaki dan može da se klasifikuje kao Tip i, $i \in \{1, \ldots, k\}$. Poznato je da je dan klasifikovan kao Tip i sa verovatnoćom p_i i da važi

$$\sum_{i=1}^{k} p_i^2 = 0.5.$$

Takođe, očekivana zarada tokom dana Tipa i je $\ln\left(\frac{a}{e^{p_i}}\right)$ miliona, gde $a > 1$. Kolika je očekivana zarada tokom proizvoljno izabranog dana?