Poasonov proces - zadaci

1. Neka je T_n, $n \in \mathbb{N}$ vreme koje prođe između $(n-1)-$og i $n-$tog događaja kod Poasonovog procesa sa stopom rasta λ.

   (a) Naći raspodelu slučajne promenljive T_n.

   (b) Naći raspodelu slučajne promenljive $T_n + T_{n+1}$.

   (c) Naći raspodelu vremena između $n-$tog i $(n+k)-$tog događaja.

2. Pretpostavimo da ljudi emigriraju na neku teritoriju sa stopom rasta $\lambda = 1$ na dan.

   (a) Koje je očekivano vreme za koje će stići deseti emigrant?

   (b) Koja je verovatnoća da će vreme koje prođe između dolaska desetog i jedanaestog emigranta biti veće od 2 dana?

3. Pacijenti stižu u ordinaciju prema homogenom Poasonovom procesu sa stopom rasta od 6 pacijenata po satu. Doktor kreće da pregleda pacijente tek kad stigne treći pacijent.

   (a) Koliko iznosi očekivano vreme od otvaranja ordinacije do početka pregleda prvog pacijenta?

   (b) Koliko iznosi verovatnoća da nakon jednog časa od otvaranja ordinacije doktor još uvek nije krenuo sa pregledanjem pacijenata?

4. Emigrant na područje A stiže u skladu sa Poasonovim procesom čija je stopa rasta 10 emigranata na nedelju dana. Svaki emigrant ima englesko poreklo sa verovatnoćom 1/12. Koja je verovatnoća da nijedan emigrant sa engleskim poreklom neće emigrirati u oblast A za vreme februara?

5. Pretpostavimo da noćni saobraćaj u ulici može biti modeliran pomoću homogenog Poasonovog procesa sa intenzitetom (stopom rasta) 40 vozila po satu. 10% tih vozila su kamioni, a 90% su automobili. Pretpostavimo da su vozila koja prođu kroz ulicu međusobno nezavisna.

   (a) Odrediti verovatnoću da za sat vremena pored fiksiranog objekta prođe bar 1 kamion.

   (b) Pretpostavimo da je za sat vremena prošlo tačno 10 kamiona. Odrediti očekivani broj automobila koji prođu za isti vremenski period.

   (c) Pretpostavimo da je za sat vremena prošlo tačno 50 vozila. Odrediti verovatnoću da je među tim vozilima tačno 5 kamiona i 45 automobila.

   (d) Odrediti očekivani broj automobila koji prođu pored posmatranog objekta do očekivanog trenutka kada bi prošao prvi kamion.

6. Naći koeficijent korelacije izmđu X_t i X_{t+s}, $s \geq 0$, kod Poasonovog procesa $\{X_t,\, t \geq 0\}$ sa stopom rasta λ.

7. U jednoj prostoriji zvono zazvoni sa vremena na vreme prateći Poasonov proces sa stopom rasta $\lambda \geq 1$. Igrač ulazi u prostoriju i u trenutku $t = 0$ počinje sledeću igru. Igrač ima mogućnost da odmah posle jednog zvona (nije bitno kog po redu) samo jednom pritisne dugme ispred sebe. Ukoliko od trenutka kada je pritisnuo dugme ispred sebe do trenutka $t = 1$ zvono više ne zazvoni, igrač pobeđuje, a u suprotnom gubi. Igrač odlučuje da čeka do trenutka $s \in [0, 1]$ i da potom pritisne dugme čim prvi put zazvoni zvono.

   (a) Odrediti verovatnoću da igrač pobedi u igri. Da li tražena verovatnoća zavisi od s?

   (b) Odrediti optiimalan trenutak s i njemu odgovarajuću (maksimalnu) verovatnoću za pobedu u igri. Da li ta maksimalna verovatnoća zavisi od λ?

   (c) Rešiti ponovo zadatak pod (b) ako je $0 < \lambda < 1$. Da li se nešto značajno menja?

8. Neka je $\{N_t,\, t \geq 0\}$ homogeni Poasonov proces sa stopom rasta λ koji predstavlja broj klijenata koji su ušli u banku do trenutka t. Čim klijent uđe u banku biva momentalno uslužen na jednom od beskonačno mnogo šaltera. Vremena usluživanja različitih klijenata su međusobno nezavisna sa istom funkcijom raspodele $G(\tau)$.

   (a) Odrediti raspodelu slučajne promenljive $N_1(t)$ koja predstavlja broj usluženih klijenata do trenutka t.

   (b) Odrediti raspodelu slučajne promenljive $N_2(t)$ koja predstavlja broj klijenata koji se još uvek uslužuju u trenutku t.

9. [**Određivanje broja ljudi koji su zaraženi HIV virusom, ali nisu oboleli od AIDS-a.**] Poznato je da od trenutka kada se neka osoba zarazi HIV-om pa do pojave prvih znakova bolesti AIDS-a prođe relativno dug period inkubacije. Iz ovih razloga, zdravstvene organizacije ne mogu sa tačnošću da odrede koliko je ljudi zaraženo ovim virusom u nekom vremenskom trenutku. Sada ćemo predstaviti aproksimativni model za ovaj problem koji se može koristiti za dobijanje grube procene broja zaraženih HIV-om. Pretpostavimo da

   - pojedinac biva zaražen HIV virusom u skladu sa Poasonovim procesom čija je stopa rasta λ nepoznata,
   - vreme od trenutka kada pojedinac biva zaražen do trenutka kada se pojave prvi simptomi bolesti je slučajna promenljiva koja ima poznatu funkciju raspodele G,
   - vremena inkubacije kod različitih pojedinaca su nezavisna.

   Označimo sa $N_1(t)$ broj pojedinaca kod kojih su se pojavili znaci bolesti do trenutka t. Takođe, neka je sa $N_2(t)$ označen broj zaraženih HIV-om kod kojih se nisu pojavili znaci bolesti do trenutka t.

   (a) Koja je najbolja procena za broj zaraženih bez simptoma do trenutka t?

   (b) Naći procenu za broj zaraženih, bez simptoma, ako period inkubacije ima eksponencijalnu raspodelu sa srednjom vrednošću 10 i ako je ukupan broj ljudi koji su iskazali znake bolesti u periodu od 16 godina 220 000.

Nehomogeni Poasonov proces

Definicija 1. *Proces prebrajanja* $\{X_t,\, t \geq 0\}$ *zove se* **nehomogeni Poasonov proces** *sa funkcijom intenziteta* $\lambda(t)$ *ako:*

1. $X_0 = 0$,
2. *proces ima nezavisne priraštaje,*
3. $P\{X_{t+h} - X_t = 1\} = \lambda(t)h + o(h),\ h \to 0$,
4. $P\{X_{t+h} - X_t \geq 2\} = o(h),\ h \to 0$.

Važi:

$$X_{s+t} - X_s : \mathcal{P}(m(s+t) - m(s)), \qquad m(t) := \int_0^t \lambda(y)\, dy.$$

Zadaci:

1. Prodavnica radi od 10 do 18h. Kupci dolaze u prodavnicu prateći Poasonov proces sa funkcijom intenziteta $\lambda(t)$ koja je do otvaranja prodavnice jednaka nuli, zatim u 12h iznosi 4 kupca po satu, u 14h 6 kupaca po satu, u 16h 2 kupca po satu, a pri zatvaranju u 18h sve do sutrašnjeg otvaranja je nula. Sva navedena vremena su linearno spojena.

   (a) Odrediti raspodelu broja kupaca u toku jednog dana.

   (b) Odrediti verovatnoću da nijedan kupac ne dođe do podneva.

   (c) Pretpostavimo da su do podneva došla tačno 2 kupca. Naći očekivano vreme dolaska drugog kupca.

Složeni (zbirni) Poasonov proces

Definicija 2. *Stohastički proces* $\{X_t,\, t \geq 0\}$ *je* **zbirni (složeni) Poasonov proces** *ako može da se predstavi kao*

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \quad t \geq 0,$$

gde je $\{N_t, t \geq 0\}$ *Poasonov proces sa stopom rasta* λ*, a* $\{Y_i, i = 1, 2, \ldots\}$ *je familija nezavisnih, jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih nezavisnih od* $\{N_t, t \geq 0\}$*.*

Imamo

$$E(X_t) = E(N_t)E(Y_1), \quad D(X_t) = E(N_t)E(Y_1^2).$$

Zadaci:

1. Familije emigriraju na neku oblast sa Poasonovom stopom $\lambda = 2$ za nedelju dana. Ako je broj ljudi u svakoj familiji nezavisan i uzima vrednosti 1, 2, 3, 4 sa verovatnoćama $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, naći očekivanu vrednost i disperziju broja ljudi koji emigriraju u periodu od 5 nedelja.

2. Ljudi dolaze na šalter banke prema Poasonovom procesu sa stopom rasta od 12 ljudi po satu. Novčani iznos koji svaki čovek podigne sa svog računa je slučajna promenljiva sa ocekivanjem 30\$ i standardnom devijacijom 50\$, pri čemu pretpostavljamo da su novčani iznosi različitih ljudi međusobno nezavisni i da takođe ne zavise ni od broja ljudi koji su došli na šalter. Negativan podignut iznos znači da je čovek dodao iznos na svoj račun. Pretpostavimo da šalteri rade 15 časova dnevno. Odrediti verovatnoću da je u toku jednog dana podignuto manje od 6000\$.