1 Granična vrednost funkcije

- želimo da ispitamo ponašanje funkcije u okolini neke tačke bez obzira na to da li je funkcija u toj tački definisana ili ne...

Definicija. Tačka $a \in \mathbb{R}$ je tačka nagomilavanja skupa A ako svaka okolina tačke a sadrži bar jednu tačku skupa A različitu od a, tj. za svako $\varepsilon > 0$ je

$$A \cap ((a-\varepsilon, a+\varepsilon) \setminus \{a\}) \neq \emptyset.$$

Definicija 1. Neka je $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, i $a \in \mathbb{R}$ tačka nagomilavanja skupa A. Kažemo da je $L \in \mathbb{R}$ granična vrednost (limes) funkcije f u tački a i pišemo

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = L$$

ako

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in A)\,(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)\,.$$

Definicija 1. Neka je $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, i $a \in \mathbb{R}$ tačka nagomilavanja skupa A.

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in A)\,(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)\,.$$

Definicija. Neka je $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, i $a \in \mathbb{R}$ tačka nagomilavanja skupa $(a, +\infty) \cap A$. Vrednost

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in (a,+\infty) \cap A}} f(x) \quad \text{označavaćemo sa } \lim_{x \to a^+} f(x)$$

i zvaćemo desnom graničnom vrednošću funkcije f u tački a.

Definicija. Neka je $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, i $a \in \mathbb{R}$ tačka nagomilavanja skupa $(-\infty, a) \cap A$. Vrednost

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in (-\infty,a) \cap A}} f(x) \quad \text{označavaćemo sa } \lim_{x \to a^-} f(x)$$

i zvaćemo levom graničnom vrednošću funkcije f u tački a.

Teorema. $\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L.$

Tablica limesa

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

2. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

3. $\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$

4. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$

5. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

6. $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

7. $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

8. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$

9. $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad a \in \mathbb{R}_+$

10. $\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$