I N T E G R A L I

I. Integracija trigonometrijskih funkcija

1. Integrali oblika

$$\boxed{\int \sin(ax)\cos(bx)dx}$$

i slično naravno $\int \sin(ax)\sin(bx)dx$, kao i $\int \cos(ax)\cos(bx)dx$.
Koriste se trigonometrijske adicione formule:

$$\sin(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}(\sin(a-b)x + \sin(a+b)x)$$

$$\sin(ax)\sin(bx) = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x)$$

$$\cos(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x + \cos(a+b)x)$$

2. Integrali oblika

$$\boxed{\int R(\sin x, \cos x)dx}$$

gde je **R racionalna funkcija** (količnik dva polinoma), rešavaju se *univerzalnom trigonometrijskom smenom:*

$$\boxed{t = tg(\frac{x}{2})}$$

Pri ovoj smeni je $dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt, \quad \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

Specijalno,
ako je $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, koristi se smena $t = \cos x$,
ako je $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, koristi se smena $t = \sin x$,
ako je $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, koristi se smena $t = tgx$.

II. Metod Ostrogradskog

Se koristi za integrale oblika

$$\boxed{\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx}$$

gde je $P_n(x)$ polinom stepena *n*. Rešenje tražimo u obliku

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \tag{1}$$

gde je $Q_{n-1}(x)$ polinom stepena *n* – 1. Posle diferenciranja jednačine (1) se koeficijenti polinoma $Q_{n-1}(x)$ i parametar λ određuju metodom neodređenih koeficijenata.

Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $(a \neq 0)$ se rešava u dva koraka:

1. napravi se transformacija $ax^2+bx+c = \frac{1}{4a}\left((2ax+b)^2 + 4ac - b^2\right)$
2. uvede se smena $t = 2ax+b$

III. Integracija racionalnih funkcija

$$\boxed{\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx, \qquad n \leq m}$$

Ako je $n > m$, tada se prvo podele polinomi da bi se dobila prava racionalna funkcija (*prava* znači da stepen polinoma u brojiocu nije veći od stepena polinoma u imeniocu.).

Zatim se racionalna funkcija $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ prikaže u obliku *zbira elementarnih racionalnih funkcija:* to su funkcije oblika $\frac{A}{(x-a)^k}$, $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}$.

Zatim se izraz x^2+px+q svede na kanonički oblik $(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}$. Smenom $t = x + \frac{p}{2}$ dobijamo integral oblika

$$\boxed{I_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}}$$

koji se rešava parcijalnom integracijom ... pri tome važe rekurentne veze:

$$I_k = \frac{t}{2ka^2(a^2+t^2)^k} + \frac{2k-1}{2ka^2} I_{k-1} \ ,$$

$$I_1 = \frac{1}{a} arctg(\frac{t}{a})$$

IV. Integrali oblika

$$\boxed{\int R(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s})dx}$$

gde je *R* racionalna funkcija, *a, b, c, d* realni brojevi, $r_1, \ldots r_s$ racionalni brojevi i determinanta $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, rešava se smenom

$$\boxed{t^m = \frac{ax+b}{cx+d}}$$

gde je $m = NZS$ (najmanji zajednički sadržilac) za **imenioce** od $r_1, \ldots r_s$.

V. Integrali oblika

$$\boxed{\int x^m (a+bx^n)^p \, dx}$$

gde su *m, n, p* racionalni brojevi, a *a, b* realni brojevi. Može se rešiti u sledećim slučajevima:

1. Ako je $p \in \mathbb{Z}$, smenom $x = t^s$, gde je $s = NZS$(imenioci od m, n).
2. Ako je $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, smenom $a + bx^n = t^s$, gde je *s* imenilac od *p*.

3. Ako je $\dfrac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}$, smenom $ax^{-n}+b=t^{s}$, gde je *s* imenilac od *p*.

VI. Ojlerove smene

Koriste se za integrale racionalnih funkcija *R* oblika

$$\boxed{\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx}$$

1. Ako je $a>0$, probati neku od sledećih smena (moguće su sve četiri kombinacije):

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm x\sqrt{a}\pm t$$

2. Ako jednačina $ax^2+bx+c=0$ ima *realna* rešenja x_1 i x_2:

   i. Ako je $x_1=x_2$, smena je $\sqrt{ax^2+bx+c}=\left|x-x_1\right|\sqrt{a}$

   ii. Ako je $x_1\neq x_2$, napisati $\sqrt{ax^2+bx+c}=\left|x-x_1\right|\sqrt{\dfrac{a(x-x_2)}{x-x_1}}$ i primeniti smenu $t^2=\dfrac{a(x-x_2)}{x-x_1}$

3. Ako je $c>0$, probati neku od sledećih smena (moguće su sve četiri kombinacije):

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{c}\pm xt$$

Dobijene integrale datog oblika rešavamo smenama kao što sledi:

$$\int R(t,\sqrt{1-t^2})dt \qquad \text{smenom} \qquad t=\sin u$$

$$\int R(t,\sqrt{t^2-1})dt \qquad \text{smenom} \qquad t=\frac{1}{\sin u}$$

$$\int R(t,\sqrt{t^2+1})dt \qquad \text{smenom} \qquad t=tgu$$