1 Lopitalovo pravilo

- metoda za izračunavanje graničnih vrednosti oblika "$\frac{0}{0}$" i "$\frac{\infty}{\infty}$".

Teorema.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

$a\in\overline{\mathbb{R}}$, leva strana je neodredjeni izraz "$\frac{0}{0}$" ili "$\frac{\infty}{\infty}$", a desna strana postoji.

- Lopitalovo pravilo se može primeniti i za rešavanje neodredjenih izraza

$$"0\cdot\infty", \ "\infty-\infty", \ "1^{\infty}", \ "0^{0}", \ "\infty^{0}",$$

ali pre toga treba ih pogodnim transformacijama svesti na oblik "$\frac{0}{0}$" ili "$\frac{\infty}{\infty}$".

Zadaci

1. Izračunati sledeće granične vrednosti koristeći Lopitalovo pravilo:

   (a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$ **Rešenje:** 1

   (b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$ **Rešenje:** ∞

   (c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$ **Rešenje:** 0

   (d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$ **Rešenje:** $-\dfrac{1}{3}$

   (e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(e-x)+x-1}$ **Rešenje:** $\dfrac{2e}{e-1}$

2 Ispitivanje toka i skiciranje grafika funkcije

Ispitati tok funkcije f znači:

1. Odrediti domen i oblasti neprekidnosti
2. Ispitati parnost i periodičnost
3. Odrediti preseke sa koordinatnim osama i znak funkcije
4. Potražiti asimptote
5. Ispitati monotonost i naći ekstremne vrednosti
6. Ispitati konveksnost/konkavnost i naći prevojne tačke

Asimptote

Neka je funkcija f definisana u nekoj okolini (levoj, desnoj okolini) tačke x_0 sem u tački x_0. Ako je bar jedna od graničnih vrednosti

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x), \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

jednaka $+\infty$ ili $-\infty$ prava $x = x_0$ naziva se **vertikalna asimptota** grafika funkcije f.
Ako postoje brojevi k i n

$$k = \lim_{x\to+\infty(-\infty)} \frac{f(x)}{x}, \qquad n = \lim_{x\to+\infty(-\infty)} \Big(f(x) - k\,x\Big).$$

i $k \neq 0$ prava $y = k\,x + n$ naziva se **kosa asimptota** grafika funkcije f kad $x \to +\infty(-\infty)$.
Ako je $k = 0$ grafik funkcije ima **horizontalnu asimptotu** $y = n$ kad $x \to +\infty(-\infty)$ i pri tome je $n = \lim_{x\to+\infty(-\infty)} f(x)$.
Napomena: Ukoliko funkcija ima horizontalnu asimptotu kada $x \to +\infty$ (odnosno $x \to -\infty$), onda nema kosu asimptotu kada $x \to +\infty$ (odnosno $x \to -\infty$). Ako funkcija nije definisana u $+\infty$ (odnosno $-\infty$), ne traze se horizonatalna i kosa asimptota kada $x \to +\infty$ (odnosno $x \to -\infty$).

Monotonost i ekstremi

Teorema. Funkcija f diferencijabilna na (a, b) je rastuća (opadajuća) na (a, b) ako i samo ako je za sve $x \in (a, b)$ $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).
Teorema (Fermaova teorema)-potreban uslov za ekstrem. Ako funkcija f, definisana u nekoj okolini tačke x_0 ima lokalni ekstrem u x_0 tada ili je $f'(x_0) = 0$ ili $f'(x_0)$ ne postoji.

- Kandidati za ekstrem su tačke x za koje $f'(x) = 0$ (stacionarne tačke).

Teorema-dovoljan uslov za ekstrem. Neka je funkcija f neprekidna u nekoj okolini tačke x_0 i ima izvod u svakoj tački te okoline sem eventualno u tački x_0. Tada ako je

$$f'(x) < 0, \quad x < x_0, \qquad f'(x) > 0, \quad x > x_0,$$

x_0 je tačka lokalnog minimuma, a u slučaju

$$f'(x) > 0, \quad x < x_0, \qquad f'(x) < 0, \quad x > x_0,$$

x_0 je tačka lokalnog maksimuma.

- Ukoliko izvodna funkcija ne menja znak pri prolazu promenljive x kroz tačku x_0 ekstrema nema.

Konveksnost/konkavnost i prevojne tačke

Grafik funkcije je

- **konveksan** u okolini neke tačke ako se tangenta na grafik funkcije u toj tački nalazi ispod grafika funkcije
- **konkavan** u okolini neke tačke ako se tangenta na grafik funkcije u toj tački nalazi iznad grafika funkcije

Teorema. Neka je funkcija f definisana na (a, b) ima drugi izvod na (a, b). Tada je funkcija f konveksna (konkavna) na (a, b) ako i samo ako je $f''(x_0) \geq 0$ ($f''(x_0) \leq 0$) za sve $x \in (a, b)$.
Teorema-potreban uslov za prevoj. Ako je funkcija f dva puta neprekidno diferencijabilna u nekoj okolini tačke x_0 koja je tačka prevoja, tada je $f''(x_0) = 0$.
Teorema-dovoljan uslov za prevoj. Ako je funkcija f neprekidna u tački x_0 i dva puta diferencijabilna u nekoj okolini tačke x_0 sem eventualno u x_0 tada je za

$$f''(x) < 0, \quad x < x_0, \qquad f''(x) > 0, \quad x > x_0,$$

ili

$$f''(x) > 0, \quad x < x_0, \qquad f''(x) < 0, \quad x > x_0,$$

x_0 tačka prevoja funkcije f.

Zadaci

Ispitati tok i skicirati grafike datih funkcija.

1. $f(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$,
2. $f(x) = x^2 e^{-x}$,
3. $f(x) = \dfrac{x-5}{x^2-9}$,
4. $f(x) = \ln \dfrac{1-x}{1+x}$,
5. $f(x) = \dfrac{x^3}{3-x^2}$,
6. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$,
7. $f(x) = \ln(1+e^x)$,
8. $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$.