1 Izvod funkcije, nagib krive

Definicija 1.1. Izvod funkcije f u tački a (označavamo ga sa $f'(a)$) je $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ ako limes postoji. Gornju formulu možemo zapisati i sa

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Izvod funkcije u a predstavlja nagib tangente na krivu u tački a (nagib krive u a). Kod linearne funkcije (prave) to je baš nagib prave. Jednačina tangente kroz a se zato može izvesti iz

$$f'(a) = \frac{y - f(a)}{x - a} \Leftrightarrow y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

1.1 Zadaci

(U narednim zadacima ne koristimo tablične izvode)

1. Naći jednačinu tangente na parabolu $y = x^2$:

   (a) u $(-2, 4)$

   (b) u tački u kojoj je nagib 8,

   (c) ako je presek tangente sa x-osom 2.

   Rešenje:

   (a) $y = -4x - 4$

   (b) $y = 8x - 16$

   (c) Imamo dva rešenja: $y = 0$ ($x-$osa) i $y = 8x - 16$

2. Naći jednačine dveju pravih kroz $(3, 13)$ koje su tangentne na parabolu $y = 6x - x^2$.
   Rešenje: Jednačina tangente kroz tačku $(1, 5)$ je $y = 4x + 1$, a kroz tačku $(5, 5)$ je $y = -4x + 25$.

3. Skicirati grafik od $y = |x - 1|$.

   (a) Naći $f'(x_0),\ x_0 > 1$, potom za $x_0 < 1$. Šta se može reći za $f'(1)$?

   (b) Postoji li tačka na grafiku u kojoj nema tangente?

   Rešenje:

   (a) Za $x_0 > 1$, $f'(x_0) = 1$, a za $x_0 < 1$ važi $f'(x_0) = -1$. $f'(1)$ ne postoji jer levi i desni limes u 1 nisu jednaki. To možemo da zaključimo i sa grafika funkcije, jer funkcija ima špic u tački $(1, 0)$ što znači da nema izvod u toj tački.

   (b) Funkcija nema tangentu u $(1, 0)$, jer $f'(1)$ ne postoji, a da bismo odredili jednačinu tangente treba nam $f'(1)$ koje predstavlja koeficijent pravca.

4. Pokazati da ako $f(x) = ax^2 + bx + c$ onda $f'(x) = 2ax + b, \forall x \in \mathbb{R}$.
   Rešenje: po definiciji

5. Korišćenjem prethodnog zadatka izračunati izvode sledećih funkcija

   (a) $f(x) = 5x - 3$,

   (b) $f(x) = 50 - 8x^2$,

   (c) $f(x) = x(50 - x)$.

   Rešenje:

(a) $f'(x) = 5$

(b) $f'(x) = -16x$

(c) $f'(x) = -2x + 50$

6. Koristeći definiciju izvoda naći izvod funkcija

(a) $f(x) = 5x - x^3$,

(b) $f(x) = x - \frac{1}{x}$.

Rešenje:

(a) $f'(x_0) = 5 - 3x_0^2$

(b) $f'(x_0) = 1 + \frac{1}{x_0^2}$

U fizici, srednja brzina na vremenskom intervalu $[t_1, t_2]$ je

$$v = \frac{s(t_1) - s(t_2)}{t_1 - t_2} = \frac{\triangle s}{\triangle t}.$$

Trenutna brzina u trenutku t se definiše kao granična vrednost kada $\triangle t \to 0$, a to je zapravo izvod funkcije s:

$$v(t) = s'(t) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle s}{\triangle t}.$$

1. Kamera pada sa zgrade visoke $784m$. Rastojanje koje prelazi je funkcija vremena: $s(t) = 16t^2$, gde je t dato u sekundama.

(a) Koliko dugo kamera pada?

(b) Koja je prosečna brzina po kojoj pada prve tri sekunde?

(c) Koja je prosečna brzina po kojoj pada poslednje tri sekunde?

(d) Koja je trenutna brzina u trenutku kada padne na zemlju?

Rešenje:

(a) Kamera će padati 7 sekundi.

(b) Prosečna brzina po kojo pada prve tri sekunde je 48 m/s.

(c) Prosečna brzina po kojo pada poslednje tri sekunde je 176 m/s.

(d) Trenutna brzina u trenutku pada je $s'(7) = 16 \cdot 14\, m/s$.

2 Tablični izvodi

Tablica Izvoda

1. $(c)' = 0$, $c\in\mathbb{R}$	7. $(\text{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$,
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha\in\mathbb{R}$	8. $(\text{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$,
3. $(a^x)' = a^x \ln a$, $a\in\mathbb{R}_+\setminus 1$,	9. $(\text{arcsin}x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$, $a\in\mathbb{R}_+\setminus 1$,	10. $(\text{arccos}x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
5. $(\sin x)' = \cos x$	11. $(\text{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$,
6. $(\cos x)' = -\sin x$	12. $(\text{arcctg}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Osnovna pravila

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x),$$

$$f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

$$(Af(x))' = Af'(x),$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \text{ za } g(x) \neq 0.$$

2.1 Zadaci

1. Korišćenjem tablice izvoda odrediti izvode funkcija:

   (a) $y = 2017$, (b) $y = 2x^7 + 100$, (c) $y = 2x^2 - 3\ln x$, (d) $y = x^5 + 3x^{\frac{1}{2}} + 5\ln x$, (e) $y = \tan x - \cot x$, (f) $y = 5\cdot 3^x + 13e^x$, (g) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$.

   Rešenje: (a) $y' = 0$ (b) $y' = 14x^6$ (c) $y' = 4x - \frac{3}{x}$ (d) $y' = 5x^4 + \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{5}{x}$ (e) $y' = \dfrac{1}{\sin x^2 \cos x^2}$ (f) $y' = 5\cdot 3^x \ln 3 + 13e^x$ (g) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

2. Odrediti izvode datih funkcija:

   (a) $y = e^x \tan x$, (b) $y = x^2 \sin x$, (c) $y = x - \sin x \cos x$, (d) $y = (x^2 + a^2)(x^2 - a^2)$.

   Rešenje:

   (a) $y' = e^x \dfrac{\sin x \cos x + 1}{\cos x^2}$

   (b) $y' = 2x\sin x + x^2\cos x$

   (c) $y' = 2\sin x^2$

   (d) $y' = 4x^3$

3. Odrediti izvode datih funkcija

   (a) $y = \dfrac{x-5}{x+7}$, (b) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, (c) $y = \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ (d) $y = \dfrac{1+ctgx}{ctgx}$ (e) $y = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}$.

   Rešenje: (a) $y' = \dfrac{12}{(x+7)^2}$ (b) $y' = \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$ (c) $y' = -\dfrac{2e^x}{(e^x-1)^2}$ (d) $y' = \dfrac{1}{\cos x^2}$ (e) $y' = \dfrac{x^2}{(\cos x + x\sin x)^2}$