FUNKCIJE

Vežbe 2. 17/10

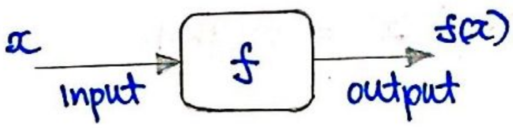
Funkcijama opisujemo zavisnost:

1) Površina kruga A zavisi od poluprečnika kruga r
   $A = r^2\pi$
2) Broj ljudi na zemlji P, zavisi od vremena t [u godinama]
3) Poštarina C zavisi od težine pošte w

Funkcija je pravilo koje svakom elementu x skupa D dodeljuje tačno jedan element, $f(x)$, skupa E

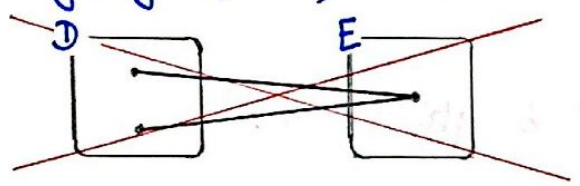
$f : D \to E$

domen (D), kodomen (E)



Definicija: Funkcija $f: D \to E$ je

- injekcija ("1-1") ako za sve $x, y \in D$ iz $f(x) = f(y)$ sledi $x = y$



· ne mogu dve različite tačke da se slikaju u jednu

- sirjekcija ("na") ako za svako $b \in E$ postoji $a \in D$ takvo da je $f(a) = b$
- bijekcija ako je injekcija i sirjekcija

Definicija: Funkcija je parna ako $f(-x) = f(x)$, a neparna ako je $f(-x) = -f(x)$.

Zadatak: Ispitati parnost sledećih funkcija:

a) $f(x) = x^2 + 2$ b) $g(x) = x^3 - x$ c) $h(x) = 3x - x^2$

Rešenje:

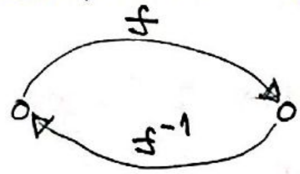
a) $f(-x) = (-x)^2 + 2 = x^2 + 2 = f(x)$ parna

b) $g(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -g(x)$ neparna

c) $h(-x) = -3x - (-x)^2 = -3x - x^2 = -(3x + x^2)$ ni parna, ni neparna

Ako je funkcija $f: D \to E$ bijekcija, tada postoji jedinstvena inverzna funkcija $f^{-1}: E \to D$ za koju važi

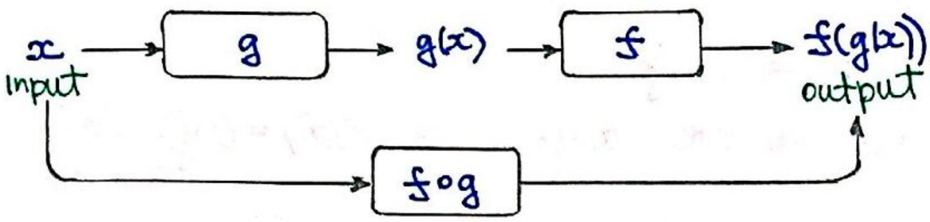
$$f^{-1} \circ f(x) = x \quad i \quad f \circ f^{-1}(y) = y \quad , x \in D, y \in E$$



za svako $b \in E$, $f^{-1}(b) = a$, gde $a \in D$ $f(a) = b$
jedinstveno

Definicija: Za date dve funkcije f i g, kompozicija funkcija f i g, $f \circ g$ je definisana sa

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$



Zadatak: Date su funkcije $f(x) = x^2$ i $g(x) = x - 3$.
Pronaći kompozicije $f \circ g$ i $g \circ f$.

Rešenje:
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-3) = (x-3)^2$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 3$$

Primetite $f \circ g \neq g \circ f$

Zadatak: Neka je $f(x) = 2x - 7$. Da li je ova funkcija bijekcija? Naći njoj inverznu funkciju $f^{-1}(x)$. Uporediti $f^{-1}(x)$ i $\frac{1}{f(x)}$.

Rešenje:

„1-1" $\quad f(x) = 2x - 7 = 2y - 7 = f(y) \Rightarrow x = y$

„na" $\quad$ Neka je $b = 2x - 7 \Rightarrow 2x = b + 7 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(b+7)$

$\Rightarrow f$ je bijekcija

$y = 2x - 7 \Rightarrow x = \frac{1}{2}y + \frac{7}{2} \qquad f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y + \frac{7}{2}$

Kako $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2x-7}$, imamo $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$

ELEMENTARNE FUNKCIJE

Matematički model je matematički opis (preko funkcija ili jednačina) nekog realnog fenomena (veličina populacije, tražnja za nekim proizvodom, brzina padajućeg objekta,...)
Svrha modela je da razume posmatrani fenomen i možda predvidi buduće ponašanje.

- odrediti zavisne i nezavisne promenljive
- odrediti jednačine koje povezuju promenljive
  (koristeći fizičke zakone ili npr. sakupljanjem podataka)

Matematički model nije idealan, nikad u potpunosti precizno ne opisuje fizičku situaciju.
Dobar model treba da bude dovoljno uprošćen ali i dovoljno precizan.

Linearan model

$$y = f(x) = mx + b$$

Polinomi

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad , \; n \in \mathbb{N}$$

$a_0, a_1, \dots, a_n$ ... koeficijenti polinoma

n ↑ stepen polinoma ako $a_n \neq 0$

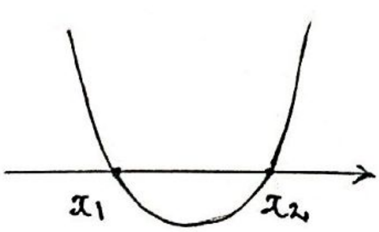
$n=1$ linearna funkcija

$n=2$ kvadratna funkcija $\quad f(x) = ax^2 + bx + c \,, \; a \neq 0$

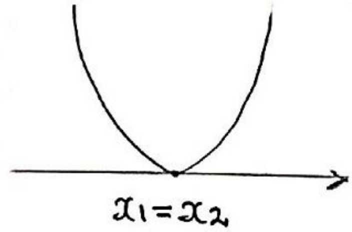
Nule : $x_{1/2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $D = b^2 - 4ac$

$\boxed{a > 0}$ konveksna

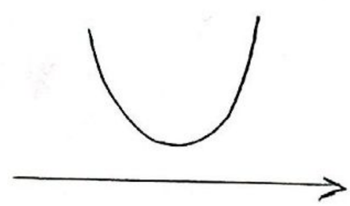
D>0 ($x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$)



D=0 ($x_1 = x_2 \in \mathbb{R}$)

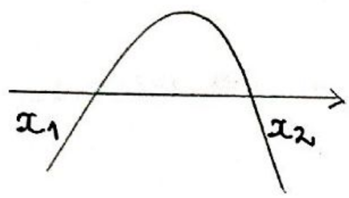


D<0 (nema realnih nula)

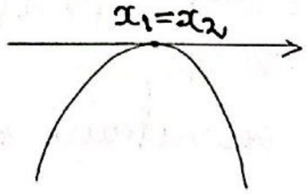


$\boxed{a<0}$ konkavna

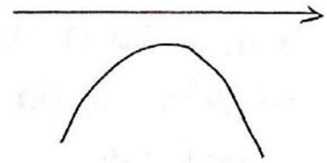
$D>0$ $(x_1 \neq x_2)$



$D=0$ $(x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ x_1 = x_2)$

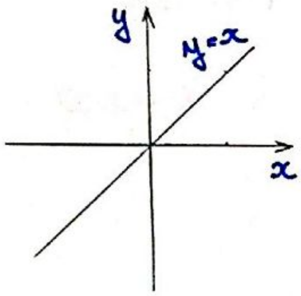


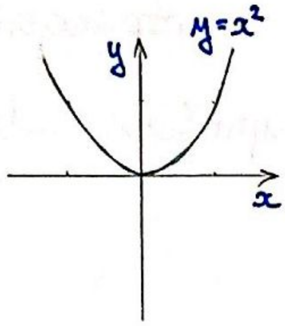
$D<0$ (nema realnih nula)



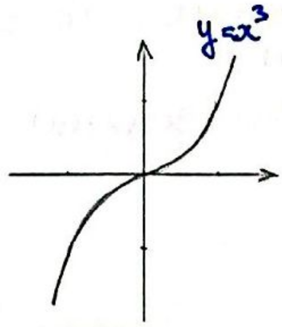
Stepene funkcije $f(x)=x^a$

$\boxed{a=n,\ n\in\mathbb{N}}$

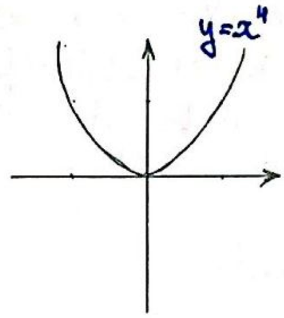




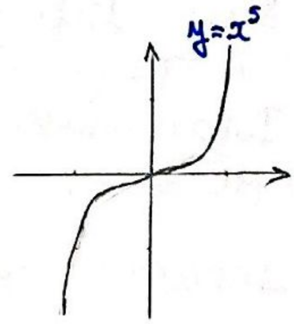
parna



neparna



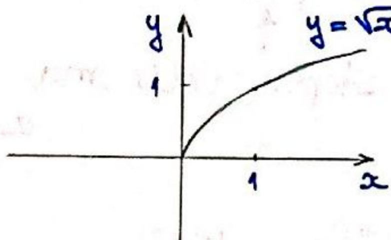
parna



neparna

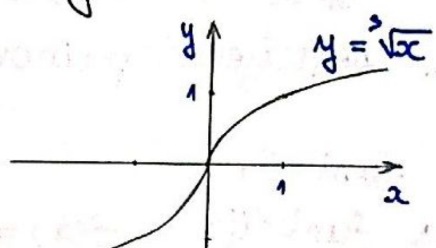
$\boxed{a=1/n,\ n\in\mathbb{N}}$

$f(x)=x^{1/n}=\sqrt[n]{x}$ korena funkcija



domen $[0,\infty)$

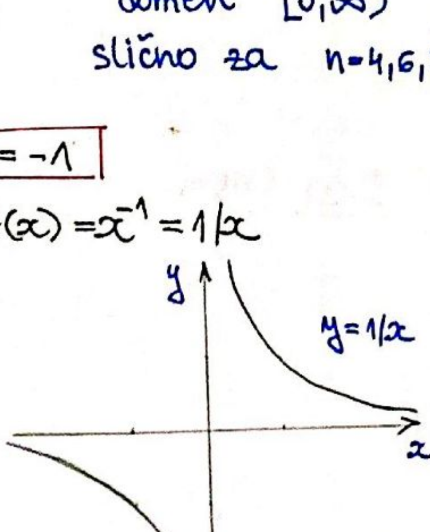
slično za $n=4,6,8,\dots$



slično za $n=3,5,7,9,\dots$

$\boxed{a=-1}$

$f(x)=x^{-1}=1/x$



Racionalne funkcije

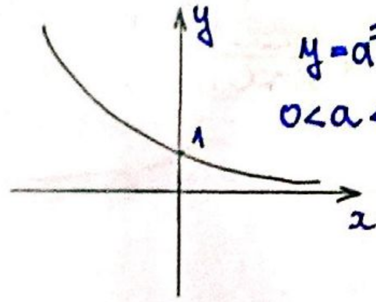
$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, P i Q su polinomi

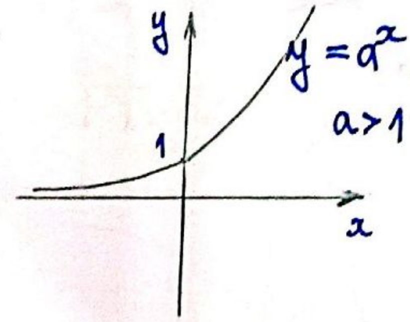
primer: $f(x) = \dfrac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, +2\}$

Eksponencijalne funkcije

$f(x) = a^x$, $a > 0$

- $D_f = \mathbb{R}$
- uvek pozitivna

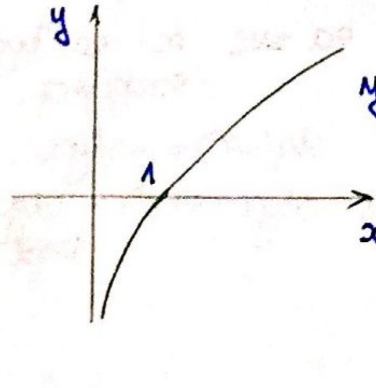


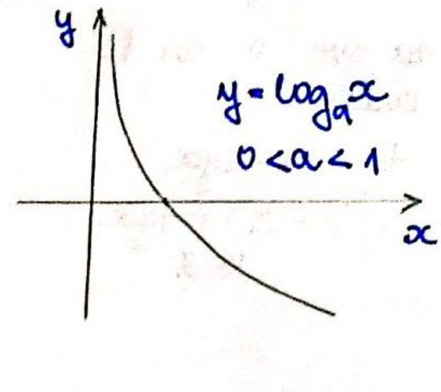


Logaritamske funkcije

$f(x) = \log_a x$, $a \in (0, \infty)$, $x > 0$, $a \neq 1$

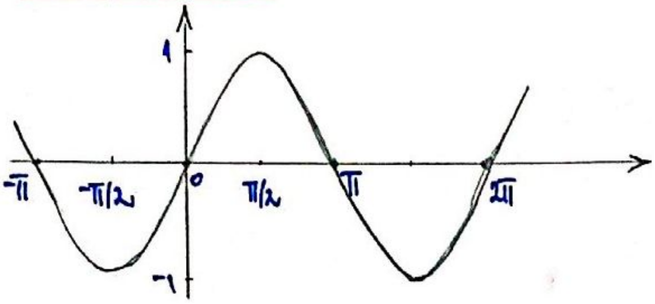
- inverzna za eksponencijalnu





Trigonometrijske funkcije

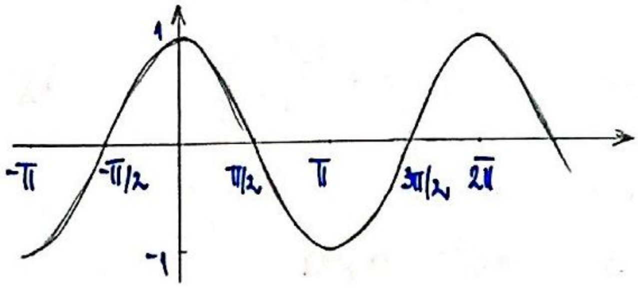
$\boxed{f(x) = \sin x}$



neparna $\sin(-x) = -\sin x$

periodična $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$
$k \in \mathbb{Z}$

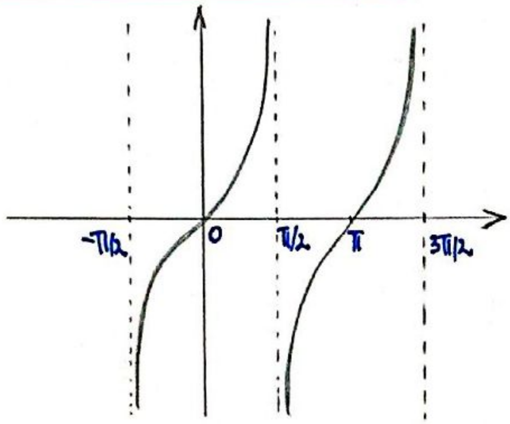
$\boxed{f(x) = \cos x}$



parna $\cos(-x) = \cos x$

periodična $\cos(x + 2k\pi) = \cos x, k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{f(x) = tg x = \frac{\sin x}{\cos x}}$

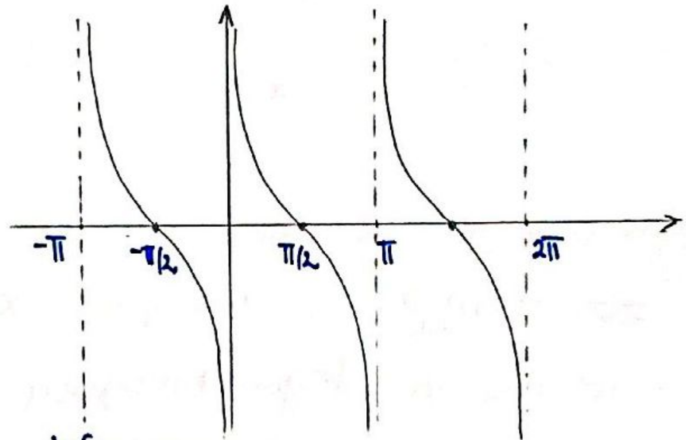


definisana za sve x za koje
$\cos x \neq 0$

neparna $tg(-x) = -tg x$

periodična $tg(x + k\pi) = tg x$
$k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{f(x) = ctg x = \frac{\cos x}{\sin x}}$



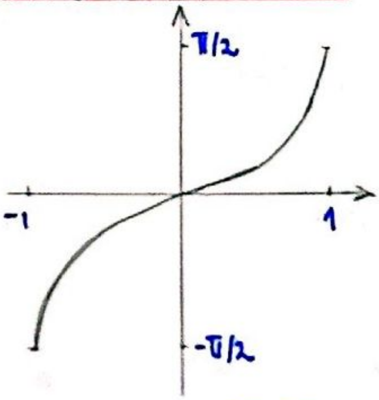
definisana za sve x za koje
$\sin x \neq 0$

neparna $ctg(-x) = -ctg x$

periodična $ctg(x + k\pi) = ctg x$
$k \in \mathbb{Z}$

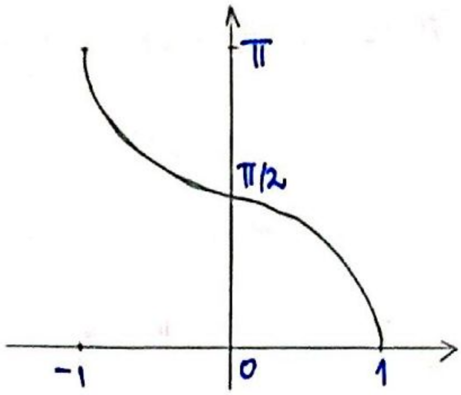
Inverzne trigonometrijske funkcije

$\boxed{f(x) = \arcsin x}$



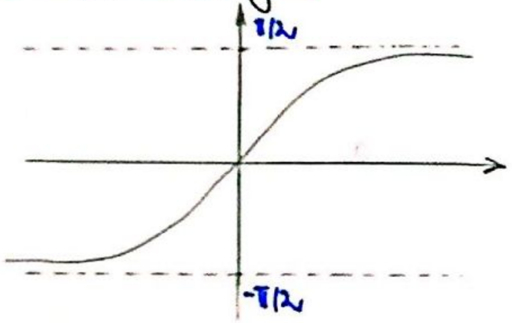
$[-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\boxed{f(x) = \arccos x}$



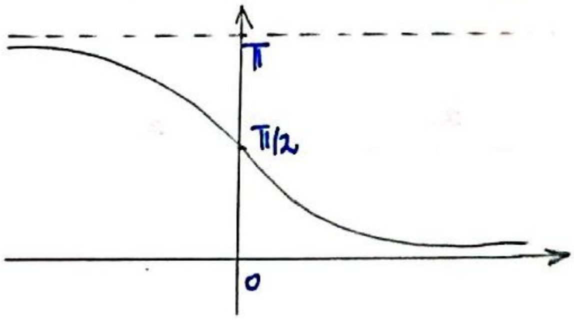
$[-1,1] \to [0,\pi]$

$\boxed{f(x) = \mathrm{arctg}\, x}$



$\mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$\boxed{f(x) = \mathrm{arcctg}\, x}$

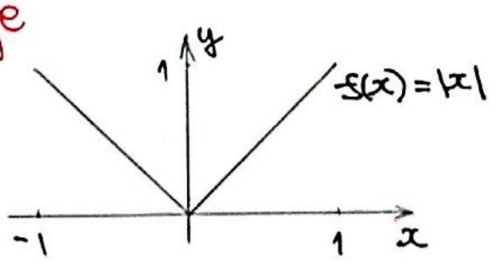


$\mathbb{R} \to (0,\pi)$.

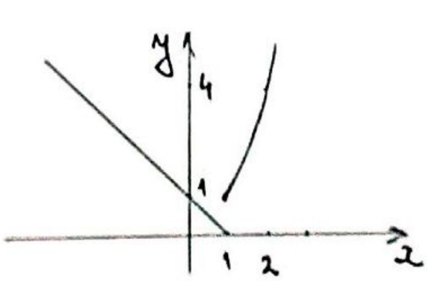
Sve ostale funkcije kao kombinacija (zbir, razlika, proizvod, količnik, kompozicija elementarnih.

Po delovima definisane funkcije

$$|x| = \begin{cases} x & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{ako } x \le 1 \\ x^2 & \text{ako } x > 1 \end{cases}$$



Transformacije funkcija

Primer. Za datu funkciju $y=\sqrt{x}$, skicirati njene transformacije $y=\sqrt{x}-2$, $y=\sqrt{x-2}$, $y=-\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$ i $y=\sqrt{-x}$

Rešenje: