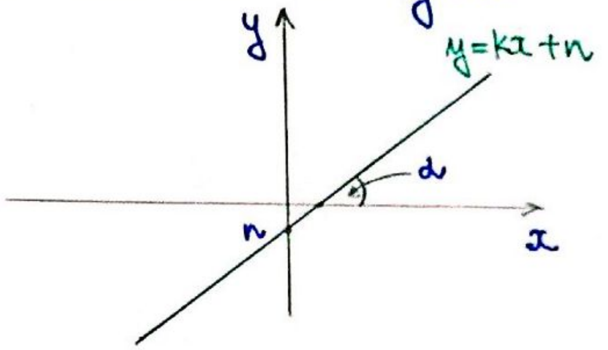
PRAVA

1) Implicitni oblik jednačine prave : $\boxed{Ax + By + C = 0}$

2) Eksplicitni oblik jednačine prave : $\boxed{y = kx + n}$

k - koeficijent pravca ($k = tg\alpha$, gde je α ugao koji prava gradi sa pozitivnom smerom x-ose)

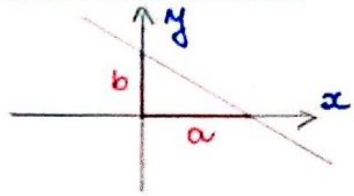
n - odsečak na y-osi



3) Segmentni oblik jednačine prave: $\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$

a - odsečak na x-osi

b - odsečak na y-osi

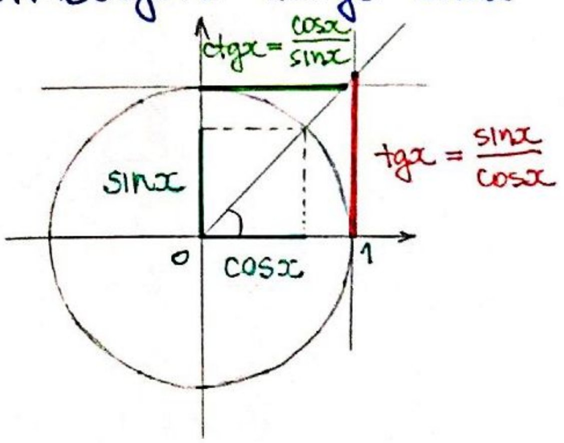


Jednačina prave kroz tačku $A(x_1, y_1)$ sa koeficijentom pravca k je $\boxed{y - y_1 = k(x - x_1)}$

Jednačina prave kroz dve tačke $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ je

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$

Primećujete da je onda $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



x	$\sin x$	$\cos x$	$tg x$	$ctg x$
$\pi/2$	1	0	nije def.	0
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$

Prave $y=k_1x+n_1$ i $y=k_2x+n_2$ su paralelne ako i samo ako $k_1=k_2$

Ako se prave $y=k_1x+n_1$ i $y=k_2x+n_2$ seku pod pravim uglom (normalne su) onda $k_1 \cdot k_2 = -1$

1. Za datu pravu $x+y+3=0$, odrediti

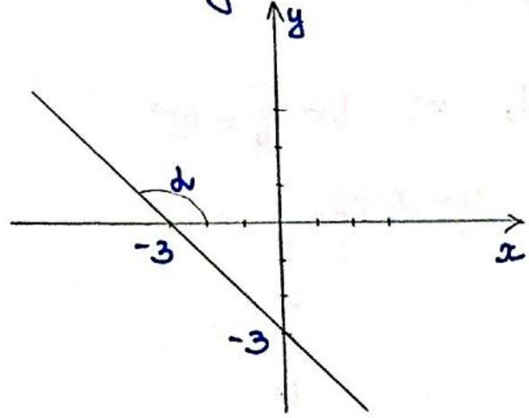
a) koeficijent pravca

b) ugao koji zaklapa sa pozitivnim delom x-ose

c) tačke u kojima seče x- i y-osu

Rešenje: To je implicitni oblik.

$x+y+3=0 \Rightarrow y=-x-3 \Rightarrow k=-1, n=-3$



Kako je $k=tg\alpha=-1$, gde je α ugao koji data prava zaklapa sa pozitivnim smerom x-ose.

To je $\alpha=135^\circ=\frac{3\pi}{4}$

$x=0 \Rightarrow y=-3$

$y=0 \Rightarrow x=-3$

presek sa x-osom : $(-3,0)$

presek sa y-osom : $(0,-3)$

2. Ako prava sa pozitivnim delom x-ose zaklapa ugao $\frac{\pi}{3}$ i ako prolazi kroz tačku $A(-2\sqrt{3},3)$, naći:

a) koeficijent pravca (nagib) date prave

b) jednačinu ove prave

c) tačke u kojima prava seče x- i y-osu

Rešenje:

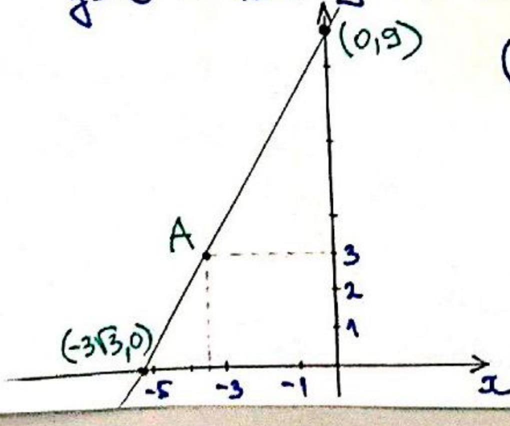
koeficijent pravca (nagib) prave je $k=tg\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

Jednačina prave je $y-3=\sqrt{3}(x-(-2\sqrt{3}))$ tj. $y=\sqrt{3}x+9$

$x=0 \Rightarrow y=9$ $(0,9)$ je presek sa y-osom

$y=0=\sqrt{3}x+9 \Rightarrow x=-\frac{9}{\sqrt{3}}=-3\sqrt{3}$

$(-3\sqrt{3},0)$ je presek sa x-osom



3. Naći jednačinu prave koja prolazi kroz tačke $A(-1,1)$ i $B(2,4)$, a potom odrediti:

a) koeficijent pravca date prave

b) ugao koji ova prava zaklapa sa pozitivnim delom x-ose

c) tačke u kojima prava seče x- i y-osu

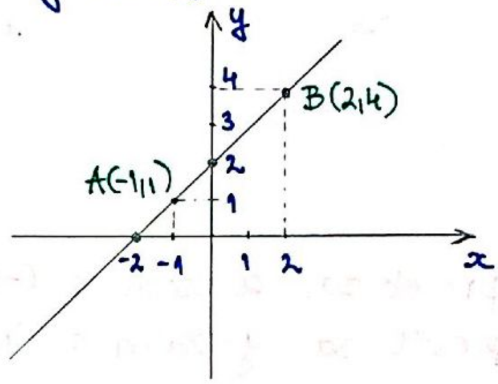
Rešenje:

koeficijent pravca: $k=\frac{4-1}{2+1}=1=\operatorname{tg}\alpha \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{4}=45^\circ$

Jednačina prave: $y-1=x+1 \Rightarrow y=x+2$

Presek sa x-osom: $(-2,0)$

Presek sa y-osom: $(0,2)$



4. Ako neka prava seče x-osu u tački a, a y-osu u tački b pokazati da se jednačina te prave može zapisati u obliku $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

Rešenje:

prava $y=kx+n$ n-presek sa y-osom $\Rightarrow n=b$

Dato: $y=0 \Rightarrow x=a$ tj $0=ka+b$

$\Rightarrow k=-\frac{b}{a}$

Pa imamo $y=-\frac{b}{a}x+b \quad /:b$

$\frac{y}{b}+\frac{x}{a}=1$

5. Data je prava p koja sadrži tačku $P(2,3)$ i paralelna je sa pravom $q: x+y-2=0$. Naći:

a) eksplicitni, implicitni i segmentni oblik prave p

b) ugao koji prava p zaklapa sa pozitivnim delom x-ose

c) tačke u kojima prava p seče x- i y-osu

Rešenje: $q: y=-x+2$

$\Rightarrow k=-1$

Paralelne prave imaju isti koeficijent pravca

$p: \; y-3=-(x-2)$

Implicitni oblik : $y+x-5=0$

eksplicitni oblik : $y=-x+5$

segmentni oblik : $\frac{x}{5}+\frac{y}{5}=1$

Kako $k=-1=\operatorname{tg}\alpha \Rightarrow \alpha=\frac{3\pi}{4}=135^\circ$

Iz segmentnog oblika se dobija da su preseci sa x- i y-osom : $(5,0)$ i $(0,5)$

6. Naći koordinate tačke $A(x,y)$ koja se nalazi u preseku pravih p i q. Prava p ima koeficijent pravca 2 i prolazi kroz koordinatni početak. Prava q ima koeficijent pravca 1 i prolazi kroz tačku $M(-1,0)$

Rešenje:

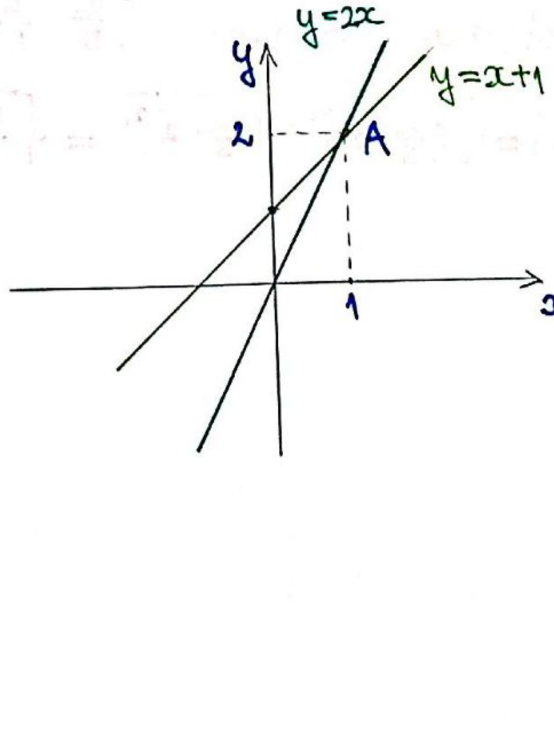
$p: \; y-0=2(x-0) \Leftrightarrow y=2x$

$q: \; y-0=x+1 \Leftrightarrow y=x+1$

$2x=x+1 \Leftrightarrow x=1$

$\Rightarrow y=2$

$A(1,2)$



7. a) Naći jednačinu prave p koja sadrži tačku $A(-2,2)$ i normalna je na pravu $q: 2x+y=4$
b) Naći koordinate tačke preseka pravih p i q
c) Naći odstojanje tačke A od prave q

Rešenje:

$q: \ y=-2x+4$
$\Rightarrow k_1=-2$

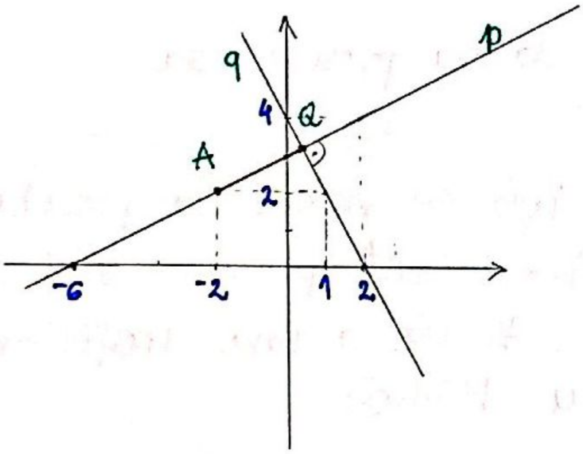
Dve prave su normalne ako $k_1 \cdot k_2 = -1$

$\underset{-2}{\underset{\parallel}{k_1}} \cdot k_2 = -1 \Rightarrow k_2 = \frac{1}{2}$ (koeficijent pravca prave p)

$p: \ y-2 = \frac{1}{2}(x+2) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x+3$

Tačka preseka p i q: $Q\left(\frac{2}{5}, \frac{16}{5}\right)$

$\begin{array}{l} y=-2x+4 \\ y=\frac{1}{2}x+3 \end{array} \Rightarrow -2x+4 = \frac{1}{2}x+3 \Rightarrow \frac{5}{2}x=1 \Rightarrow x=\frac{2}{5}$
$\Rightarrow y=\frac{16}{5}$



Rastojanje između dve tačke (x_1,y_1) i (x_2,y_2)
$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

Rastojanje između $\left(\frac{2}{5}, \frac{16}{5}\right)$ i $(-2,2)$ je

$$d=\sqrt{\left(\frac{2}{5}+2\right)^2+\left(\frac{16}{5}-2\right)^2} = \sqrt{\frac{12^2+6^2}{5^2}} = \frac{6}{5}\sqrt{5}$$

8. a) Zavisnost između temperature izražene u stepenima celzijusa C i u stepenima Farenhajta F je linearna. Ako je poznato da je $C=0$, ako je $F=32$ i $C=100$, ako je $F=212$, izraziti tu zavisnost

b) Da li je za neku temperaturu $C=F$ i ako jeste za koju vrednost se dostiže?

Rešenje:

a) Tražimo jednačinu: $C = kF + n$, $k, n = ?$

Imamo tačke: $(32,0)$ i $(212,100)$

$$k = \frac{100-0}{212-32} = \frac{100}{180} = \frac{5}{9} \Rightarrow y = \frac{5}{9}(x-32) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}$$

Ili:
$$\begin{array}{l} 0 = 32k + n \\ 100 = 212k + n \end{array} \Rightarrow 100 = 180k \Rightarrow k = \frac{5}{9}$$
$$n = -32k = -\frac{160}{9}$$

b) ako $C=F$ imamo

$$F = \frac{5}{9}F - \frac{160}{9} \Leftrightarrow \frac{4}{9}F = -\frac{160}{9} \Leftrightarrow \boxed{F = -40 = C}$$

9. Naći rastojanje tačke $B(4,1)$ od prave $p: 3x - y = 5$

Rešenje: $p: y = 3x - 5$ $\quad k_1 = 3$

Prava q normalna na p ima koef. pravca $k_2 = -\frac{1}{3}$

Ako sadrži tačku $B(4,1)$ ona je odlika

$$q: y - 1 = -\frac{1}{3}(x-4) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$$

Presek p i q: $3x - 5 = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \Leftrightarrow \frac{10}{3}x = \frac{22}{3} \Leftrightarrow x = \frac{11}{5}$
$$y = \frac{8}{5} \qquad Q\left(\frac{11}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

Rastojanje B i Q:

$$d = \sqrt{\left(4-\frac{11}{5}\right)^2 + \left(1-\frac{8}{5}\right)^2}$$

10. Kada se vazduh kreće ka gore, on se širi i hladi.

a) Ako je na zemlji temperatura vazduha $20°C$, a temperatura na visini od $1km$ je $10°C$, izraziti temperaturu T (u $°C$) u funkciji od visine h (u kilometrima), koristeći linearni model (funkciju).

b) Nacrtati grafik ove funkcije. Naći nagib ove krive i objasniti šta predstavlja u ovom modelu.

c) Koja je temperatura vazduha na visini od $2{,}5 km$?

Rešenje: T... temperatura vazduha

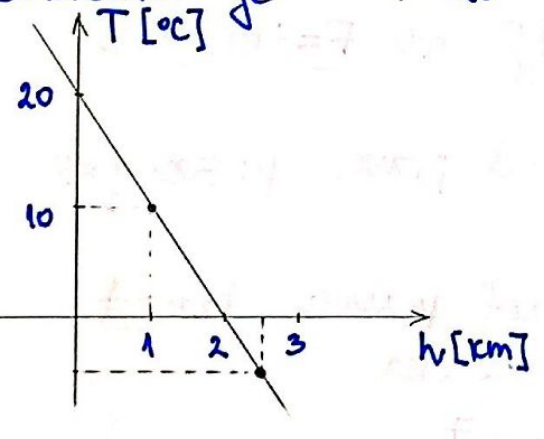
h... rastojanje (visina) od zemlje

Treba da nađemo jednačinu: $T = kh + n$, $k, n = ?$

Imamo tačke: $(0,20)$ i $(1,10)$

Onda $k = \frac{10-20}{1-0} = -10$

Jednačina je $T - 20 = -10(h-0) \Leftrightarrow T = -10h + 20$



Ova funkcija ima smisla samo za $h \geq 0$

Njen nagib je $k = -10$ (negativan) što znači da je temperatura niža na većim visinama (opada sa visinom)

Ako je $h = 2.5$ onda $T = -10 \cdot 2.5 + 20 = -5°C$