

1 Izvod složene funkcije

Zadaci

1. Odrediti prvi izvod sledećih funkcija:

$$(a) y = (x + 2)^3 \quad (b) y = \sin^2 x \quad (c) y = 2 \sin(6x) \quad (d) y = x^2 e^{-2x}$$

$$(e) y = e^{-x}(\sin x + \cos x) \quad (f) y = \frac{1}{2} \ln(\operatorname{tg} x) + \ln(\cos x) \quad (g) y = \frac{\ln 3x}{x}.$$

Rešenje: (a) $y' = 3(x + 2)^2$ (b) $y' = \sin 2x$ (c) $y' = 12 \cos 6x$ (d) $y' = 2x(1 - x)e^{-2x}$
 (e) $y' = -2 \sin x e^{-x}$ (f) $y' = \operatorname{ctg} 2x$ (g) $y' = \frac{1 - \ln 3x}{x^2}$.

2. Odrediti prvi izvod datih funkcija:

$$(a) y = \ln(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}) \quad (b) y = \sqrt{1 + \sin x}$$

$$(c) y = \ln \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}, a \in \mathbb{R} \quad (d) y = \ln \sqrt{\frac{\sin 2x}{1 - \sin 2x}}.$$

Rešenje: (a) $y' = \frac{-1}{2\sqrt{x(x-1)}}$ (b) $y' = \frac{\cos x}{2\sqrt{1 + \sin x}}$ (c) $y' = \frac{a}{a^2 - x^2}$ (d) $y' = \frac{\operatorname{ctg} 2x}{1 - \sin 2x}$.

2 Teorema srednje vrednosti

Teorema 2.1. Neka je $y = f(x)$ funkcija koja ima sledeće osobine:

- $f(x)$ je neprekidno na $[a, b]$;
- $f(x)$ je diferencijabilno na (a, b) .

Tada postoji bar jedna tačka $c \in (a, b)$ takva da je

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Zadaci

- (a) Skicirati grafik funkcije $f(x) = x + \frac{4}{x}$ u $[0, 10] \times [0, 10]$.
 (b) Nacrtati sečicu kroz tačke $(1, 5)$ i $(8, 8.5)$.
 (c) Naći c koje zadovoljava zaključak teoreme o srednjoj vrednosti na $[1, 8]$.
 Napomena: Primetiti da f ne zadovoljava uslove teoreme srednje vrednosti na intervalu $[0, 10]$. Zašto?
- Proveriti da li važe uslovi teoreme o srednjoj vrednosti za sledeće funkcije na datom intervalu. Zatim naći sve brojeve c za koje važi zaključak teoreme.
 (a) $f(x) = 3x^2 + 2x + 5, [-1, 1]$, (b) $f(x) = e^{-2x}, [0, 3]$.
- Neka je $f(x) = (x - 3)^{-2}$. Pokazati da ne postoji $c \in (1, 4)$ tako da je $f(4) - f(1) = f'(c)(4 - 1)$.
 Zašto ovo nije u kontadikciji sa teoremom srednje vrednosti?
- Pokazati da jednačina $1 + 2x + x^3 + 4x^5 = 0$ ima tačno jedan realan koren.
- Pokazati da jednačina $x^3 - 15x + c = 0, c \in \mathbb{R}$, ima najviše jedan koren u intervalu $[-2, 2]$.
- Neka je za sve $x \in \mathbb{R}$ ispunjeno $3 \leq f'(x) \leq 5$. Pokazati da je tada

$$18 \leq f(8) - f(2) \leq 30.$$

7. Pomoću teoreme o srednjoj vrednosti pokazati

$$\sin a - \sin b \leq a - b$$

za sve $a, b \in \mathbb{R}$.

8. U 14 : 00 auto se kreće brzinom 30km/h . U 14 : 10 brzina je 50km/h . Pokazati da je u nekom momentu između 14 : 00 i 14 : 10 ubrzanje tačno 120km/h^2 .