

# 1 Granična vrednost funkcije

**Definicija 1.1.** Neka je funkcija  $f$  definisana na nekom otvorenom intervalu koji sadrži tačku  $a$ , sem eventualno u tački  $a$ . Kažemo da je  $L$  **granična vrednost (limes)** funkcije  $f$  u tački  $a$  i zapisujemo

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

ako za svaki broj  $\varepsilon > 0$  postoji njemu odgovarajući broj  $\delta > 0$  takav da važi:

$$|x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

## Jednostrane granične vrednosti

Leva granična vrednost (levi limes):  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$

Desna granična vrednost (desni limes):  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$

**Teorema 1.2.**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  ako i samo ako  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ .

**Primer 1.3.** Granične vrednosti nekih elementarnih funkcija.

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \infty$
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$
3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
5.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

## Tablica limesa

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
6.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
7.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$
8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$
9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ ,  $a \in \mathbb{R}_+$
10.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$

## Zadaci

1. Pokazati po definiciji da je (a)  $\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 5) = -1$ , (b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ .

2. Izračunati:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2}{3 - x}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x}{x^2 - 4}, \quad (c) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{4x - 1}{x + 1}.$$

**Rešenje:** (a)  $-\infty$  (b)  $-\infty$  (c)  $-\infty$ .

3. Izračunati:

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 2x}{x^3 + 1}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{x - \sqrt{x}}, \quad (c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 5x}{2x^2 + 3}, \quad (d) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x).$$

**Rešenje:** (a) 0 (b)  $+\infty$  (c)  $\frac{1}{2}$  (d) 0.

4. Koristeći tablicu limesa izračunati:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin x}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2} \right)^{x^2 - 1}, \quad (c) \lim_{x \rightarrow 2} (3 - x)^{\frac{1}{x^2 - 4}}.$$

**Rešenje:** (a) 5 (b)  $e^4$  (c)  $e^{-\frac{1}{4}}$ .

5. Ako je  $f(x) = \left( \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} \right)^x$ , naći sledeće limese: (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , (b)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ , (c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .

**Rešenje:** (a) 1 (b)  $-2$  (c)  $e^3$ .

6. Koristeći tablicu limesa izračunati:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{x}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}, \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sin x \ln(1 + x)}, \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{x}.$$

**Rešenje:** (a) 4 (b)  $a - b$  (c) 1 (d) 1.